

Vorlesungsmitschrift

Mathematik für Physiker:innen
III

Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

Carl O. R. Lutz

Wintersemester 2024/25

Stand: 11. April 2025

Vorwort

Ich werde dieses Skript parallel zur Vorlesung *Mathematik für Physiker:innen III (MfP3)* im Wintersemester 2024/25 schreiben. Es wird die wesentlichen Inhalte der Vorlesung dokumentieren. Der Anspruch ist aber in keinem Fall eine wortwörtliche „Mitschrift“ der Vorlesung anzufertigen. Im Gegensatz, das Skript soll die Darstellungen der Vorlesung komplementieren.

Die Struktur der Vorlesung wird sich an den vorangegangenen Durchläufen der MfP3 orientieren. Ihr Inhalt basiert zu großen Teilen auf den Notizen der Professoren *Ulrich Pinkall*, *Boris Springborn* und *Yuri Suris*, denen ich für ihre Unterstützung danke.

Erfahrungsgemäß lassen sich trotz aller Bemühungen Tippfehler in einem solchen Manuskript nicht gänzlich vermeiden. Bei Anregungen wendet euch gerne an mich (clutz@math.tu-berlin.de).

Berlin, 11. April 2025

Carl Lutz

Inhaltsverzeichnis

1	Mehrdimensionale Integration	1
1.1	Das Volumen einer Menge	1
1.1.1	Quader und Elementarmengen	1
1.1.2	Jordan-Messbarkeit und Nullmengen	2
1.1.3	Rechenregeln für Volumen	4
1.2	Das mehrdimensionale Riemann-Integral	5
1.2.1	Integration über Elementarmengen	5
1.2.2	Integration über beschränkte Integrationsgebiete	6
1.2.3	Der Satz von Fubini	9
1.2.4	Parameterintegrale	11
1.2.5	Lebesgue-Kriterium für Riemann-Integrierbarkeit	13
1.3	Der Transformationssatz	15
1.3.1	Zwei Versionen des Satzes	15
1.3.2	Wichtige Parametrisierungen	17
1.3.3	Beweisskizze für den Transformationssatz	18
1.4	Uneigentliche Integration	21
1.4.1	Zerlegungen und Ausschöpfungen von offenen Mengen	21
1.4.2	Das uneigentliche Riemann-Integral	22
2	Vektoranalysis	25
2.1	Kurven- und Oberflächenintegrale	25
2.1.1	Kurvenintegrale	25
2.1.2	Reguläre Flächenstücke und Oberflächenintegrale	27
2.1.3	Berandete Untermannigfaltigkeiten	30
2.2	Der Rotationssatz von Stokes	35
2.2.1	Die Rotation eines Vektorfeldes	36
2.2.2	Lokale und Globale Version des Satzes	38
2.3	Der Divergenzssatz von Gauß	42
2.3.1	Der zweidimensionale Fall	43
2.3.2	Lokale und globale Version des Satzes	43
2.4	Potentialtheorie	47
2.4.1	Konservative Vektorfelder	47
2.4.2	Existenz von Potentialen	48
2.4.3	Der Laplace-Operator	50
2.4.4	Dirichlet- und Neumann-Randwertprobleme	54
2.4.5	Fundamentallösung des Laplace-Operators	56
2.4.6	Helmholtz-Zerlegung	58

3	Gewöhnliche Differentialgleichungen	60
3.1	Einführende Betrachtungen	60
3.1.1	Grundbegriffe	60
3.1.2	Systeme von Differentialgleichungen	61
3.1.3	Trennung der Veränderlichen	62
3.2	Eigenschaften der Lösung eines Anfangswertproblems	64
3.2.1	Lokale Existenz: Satz von Picard–Lindelöf	64
3.2.2	Lemma von Gronwall und globale Eindeutigkeit	67
3.2.3	Fortsetzbarkeit und Lebensdauer von Lösungen	68
3.3	Lineare Differentialgleichungen	70
3.3.1	Fundamentallösungen und Variation der Konstanten	71
3.3.2	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	75
3.3.3	Skalare lineare Differentialgleichung höherer Ordnung	82
3.4	Dynamische Systeme	89
3.4.1	Phasenraum, Orbits und Erhaltungsgrößen	90
3.4.2	Fixpunkte und Stabilität	91
	Literatur	95
	Sachregister	96

~ 1 ~

Mehrdimensionale Integration

1.1 Das Volumen einer Menge

1.1.1 Quader und Elementarmengen

Ein (**achsenparalleler**) **Quader** Q im \mathbb{R}^n ist durch das kartesische Produkt von n Intervallen gegeben:

Vorlesung 1
(15.10.24)

$$\begin{aligned} Q &= [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \in [a_1, b_1], \dots, x_n \in [a_n, b_n]\}. \end{aligned}$$

Hierbei nehmen wir immer an, dass $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ und $a_i < b_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt. Im eindimensionalen ist „Quader“ (per Definition) nur ein anderes Wort einem Intervall. Im zweidimensionalen Fall ($n = 2$) nennen wir Q auch ein **Rechteck**. Das **Volumen eines Quaders** Q ist definiert durch das Produkt seiner Kantenlängen

$$\text{vol}_n(Q) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Definition 1.1. Die Vereinigung endlich vieler disjunkter Quader bezeichnen wir als **Elementarmenge**, das heißt, $E \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Elementarmenge genau dann, wenn es Quader $Q_1, \dots, Q_s \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit $E = \bigcup_{i=1}^s Q_i$ und $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$. Die Familie $\mathcal{Z} = \{Q_i\}$ heißt **Zerlegung** von E . Wir sagen, dass eine weitere Zerlegung \mathcal{Z}' von E eine **Verfeinerung** von \mathcal{Z} ist, wenn für jedes $Q' \in \mathcal{Z}'$ ein $Q \in \mathcal{Z}$ existiert, sodass $Q' \subset Q$. Zusätzlich definieren wir, dass auch die leere Menge \emptyset eine Elementarmenge ist. Die Menge der Elementarmengen im \mathbb{R}^n bezeichnen wir mit $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

Das folgende Lemma zeigt, dass sich unser Begriff der Elementarmenge mit den üblichen Operationen zwischen Mengen verträgt. Man spricht auch davon, dass die Menge der Elementarmengen $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ abgeschlossen bezüglich dieser Operationen ist.

Lemma 1.1. Seien $Q_1, \dots, Q_s \subset \mathbb{R}^n$ Quader (nicht notwendigerweise disjunkt). Dann gilt:

- (i) Ihr Schnitt $\bigcap_{i=1}^s Q_i$ ist eine Elementarmenge (sogar ein Quader).
- (ii) Die Differenz $Q_i \setminus Q_j$ ist eine Elementarmenge.
- (iii) Die Vereinigung $\bigcup_{i=1}^s Q_i$ ist eine Elementarmenge.

Beweis. Übung! □

Der Begriff des Volumens für Quader lässt sich nun unmittelbar auf Elementarmengen erweitern: Ist Elementarmenge $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ und \mathcal{Z} eine Zerlegung von E , so definieren wir das Volumen von E durch

$$\text{vol}_n(E) := \sum_{Q \in \mathcal{Z}} \text{vol}_n(Q).$$

Wieder betrachten wir die leere Menge separat und definieren $\text{vol}_n(\emptyset) = 0$. Allerdings ist bei solch einer Definition Vorsicht geboten, denn die Zerlegung einer Elementarmenge in disjunkte Quader ist mitnichten eindeutig. Das folgende Lemma garantiert uns, dass wir uns trotzdem keine Sorgen machen müssen.

Satz 1.1. Das Volumen einer Elementarmenge hängt nicht von ihrer Zerlegung in Quader ab.

Beweis. Es ist möglich einen elementaren Beweis zu führen indem man sich direkt spezielle Zerlegungen baut (*in Vorlesung skizziert*). Ich werde hier noch einen anderen sehr eleganten, aber auch trickreichen, Beweis zeigen:

Betrachten wir zuerst ein Intervall $[a, b) = I \subset \mathbb{R}$. Ich behaupte, dass

$$\text{vol}_1(I) = b - a = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|I \cap \mathbb{Z}/N|}{N}, \quad (1.1)$$

wobei $\mathbb{Z}/N := \{k/N : k \in \mathbb{Z}\}$ und $|I \cap \mathbb{Z}/N|$ die Anzahl der Elemente in der Menge meint. Um das zu sehen bezeichnen wir mit $k_a, k_b \in \mathbb{Z}$ die kleinsten ganzen Zahl, sodass $a \leq k_a/N$ bzw. $b \leq k_b/N$. Dann ist k_a/N bzw. k_b/N das kleinste bzw. größte Element in $I \cap \mathbb{Z}/N$ sowie $|I \cap \mathbb{Z}/N| = k_b - k_a + 1$. Weiterhin ist $k_b/N \leq b \leq (k_b+1)/N$ und somit gilt $\lim_{N \rightarrow \infty} k_b/N = b$. Analog folgt $\lim_{N \rightarrow \infty} k_a/N = a$, woraus meine Behauptung (1.1) folgt.

Durch n -fache Produktbildung folgt nun für einen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$:

$$\text{vol}_n(Q) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|Q \cap \mathbb{Z}^n/N|}{N^n}$$

Damit gilt aber gleich auch für eine Elementarmenge E mit Zerlegung \mathcal{X} (*überlegt euch warum!*), dass

$$\text{vol}_n(E) = \sum_{Q \in \mathcal{X}} \text{vol}_n(Q) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|E \cap \mathbb{Z}^n/N|}{N^n}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung hängt aber nicht mehr von der Zerlegung ab. Somit ist der Satz gezeigt. \square

1.1.2 Jordan-Messbarkeit und Nullmengen

Ausgestattet mit diesen Grundbegriffen können wir uns nun allgemeineren Mengen widmen. Wir definieren das **äußere Volumen** einer beschränkten Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ als

Vorlesung 2
(17.10.24)

$$*\text{vol}_n(M) := \inf \{ \text{vol}_n(E) : E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \text{ und } M \subset E \}.$$

Analog ist das **innere Volumen** von M gegeben durch

$$*\text{vol}_n(M) := \sup \{ \text{vol}_n(E) : E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \text{ und } M \supset E \}.$$

Es folgt unmittelbar aus diesen Definitionen, dass

$$0 \leq *\text{vol}_n(M) \leq \text{vol}_n(M) < \infty.$$

Definition 1.2. Wir sagen, dass eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ **Jordan-messbar** ist, wenn ihr äußeres und inneres Volumen übereinstimmt. In diesem Fall nennen wir

$$\text{vol}_n(M) := *\text{vol}_n(M) = \text{vol}_n(M)$$

das **Volumen** von M . Im eindimensionalen ($n = 1$) und zweidimensionalen ($n = 2$) Fall nennen wir das Volumen auch **Länge** bzw. **Flächeninhalt**. Die Menge der Jordan-messbaren Mengen des \mathbb{R}^n bezeichnen wir mit $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.

Beispiel 1.1. Einige Beispiele für Jordan-messbare Mengen sind:

- (i) Der Abschluss \bar{E} jeder Elementarmenge E .
- (ii) Die Fläche zwischen einer (nicht negativen) Riemann-integrierbaren Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und der x -Achse (vgl. MfP2).

Für unsere folgende Diskussion des mehrdimensionalen Riemann-Integrals wird es insbesondere interessant solche Mengen zu identifizieren, die wir „gefahrlos“ aus dem Integrationsbereich entfernen können ohne den Wert des Integrals zu ändern. Gute Kandidaten hierfür sind Jordan-messbare Mengen $M \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{vol}_n(M) = 0$. Wir nennen diese Mengen **Jordan-Nullmengen**.

Beispiel 1.2. Einige Beispiele für Jordan-Nullmengen sind:

- (i) Endliche Punktmengen im \mathbb{R}^n .
- (ii) Endliche Vereinigungen von Jordan-Nullmengen.
- (iii) Differenzierbare kompakte Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n der Kodimension ≥ 1 , d.h., Untermannigfaltigkeiten der Dimension $\leq n - 1$. Beispiele hierfür sind differenzierbare Kurven in einem Rechteck in \mathbb{R}^2 oder eine zweidimensionale Fläche in einem dreidimensionalen Quader in \mathbb{R}^3 .

Anmerkung 1.1. Die Forderung nach Differenzierbarkeit der Untermannigfaltigkeit im vorangegangenen Beispiel 1.2 ist im Allgemeinen notwendig. Betrachten wir zum Beispiel nur noch stetige Kurven so lassen sich sogenannte *raumfüllende Kurven* konstruieren. Ein konkretes Beispiel hierfür ist die *Peano-Kurve*, eine Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$, welche sowohl stetig als auch surjektiv ist.

Der Begriff der Jordan-Nullmenge wird im Folgenden an einigen Stellen zu restriktiv sein. Wir erweitern ihn entsprechend wie folgt.

Definition 1.3. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Nullmenge**, falls sie von einer abzählbaren Menge von Quadern mit beliebig kleinem Gesamtvolumen überdeckt werden kann, d.h., wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine Familie $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ existiert, wobei jedes Q_i ein Quader oder \emptyset ist, sodass $M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}_n(Q_i) \leq \epsilon$.

Anmerkung 1.2. Dieser erweiterte Begriff einer Nullmenge gehört zu einer Verallgemeinerung des Volumenkonzeptes: dem *Lebesgue-Maß*. Wir werden nicht weiter auf das Lebesgue-Maß eingehen, merken aber an dieser Stelle an, dass das Lebesgue-Maß einer Jordan-messbaren Menge mit dem von uns definierten Volumen übereinstimmt.

Beispiel 1.3. Einige Beispiele für Nullmengen sind:

- (i) Jede Jordan-Nullmenge ist eine Nullmenge.
- (ii) Abzählbare Punktmengen im \mathbb{R}^n . Insbesondere ist $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ eine Nullmenge, aber keine Jordan-Nullmenge.
- (iii) Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen.

Wann ist eine Nullmenge eine Jordan-Nullmenge? Wann ist beschränkte Menge Jordan-Messbar? Die folgenden Sätze geben Antworten.

Lemma 1.2. Eine kompakte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn sie eine Jordan-Nullmenge ist.

Beweis. Übung! (Tipp: Satz von Heine–Borel.) \square

Satz 1.2 — Kriterium für Jordan-Messbarkeit. Eine beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ihr Rand ∂M eine Jordan-Nullmenge ist.

Beweis. Wir beobachten zuerst (indem wir eine gemeinsame Zerlegung betrachten), dass immer $\text{vol}_n(E') = \text{vol}_n(E' \setminus E) + \text{vol}_n(E)$ für zwei Elementarmengen $E, E' \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ mit $E \subset E'$ gilt.

Nun nehmen wir an, dass M Jordan-messbar ist. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ Elementarmengen E_* und E^* mit $E_* \subset M \subset E^*$ und $\text{vol}_n(E^*) - \text{vol}_n(E_*) < \epsilon$. Weiterhin ist $\partial M \subset E^* \setminus E_*$. Mit der vorangegangenen Beobachtung und der Tatsache, dass $E^* \setminus E_*$ eine Elementarmenge ist, folgt, dass ∂M eine Jordan-Nullmenge ist.

Für die Umkehrung greifen wir etwas vor und verwenden den Zusammenhang zur Integration (siehe Beispiel 1.4). Aus dem Lebesgue-Kriterium für Riemann-Integrierbarkeit (Satz 1.5) folgt, dass ∂M eine Nullmenge ist. Da aber ∂M abgeschlossen und nach Voraussetzung auch beschränkt ist, folgt nun die Behauptung aus dem vorangegangenen Lemma 1.2. \square

1.1.3 Rechenregeln für Volumen

Um das Volumen einer Menge zu bestimmen ist es oft ratsam sie in einfachere Mengen zu zerlegen. Eine Möglichkeit hierfür besteht darin die Menge „additiv“ in kleinere (hoffentlich einfachere) Mengen der gleichen Dimension zu zerlegen.

Satz 1.3 — Rechenregeln für Volumen („additiv“). Seien $N, M \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ Jordan-messbare Mengen. Dann sind $N \setminus M, M \setminus N, N \cap M$ und $N \cup M$ Jordan-messbar und es gilt

$$\text{vol}_n(N \cup M) = \text{vol}_n(N) + \text{vol}_n(M) - \text{vol}_n(N \cap M). \quad (1.2)$$

Insbesondere gilt, $\text{vol}_n(N \cup M) = \text{vol}_n(N) + \text{vol}_n(M)$ genau dann, wenn $N \cap M$ eine Jordan-Nullmenge ist.

Beweis. Die Randpunkte der Mengen $N \setminus M, M \setminus N, N \cap M$ und $N \cup M$ sind immer eine Teilmenge der Randpunkte von N und M , d.h. von $(\partial N) \cup (\partial M)$. Da sowohl ∂N als auch ∂M Jordan-Nullmengen sind (Satz 1.2) sind auch die entsprechenden anderen Ränder Jordan-Nullmengen. Die Jordan-Messbarkeit folgt also wieder aus Satz 1.2. Um die Formel (1.2) herzuleiten ist es nun hilfreich geschickt „doppelt zu zählen“. Das Werkzeug hierfür stellen wir in Beispiel 1.4 bereit. \square

Eine zweite „multiplikative“ Möglichkeit bietet die Darstellung unserer Ausgangsmenge als Produkt von zwei Mengen von niedrigerer Dimension.

Satz 1.4 — Rechenregeln für Volumen („multiplikativ“). Das kartesische Produkt $M \times N$ zweier Jordan-messbarer Mengen $M \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^m)$ und $N \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ ist ebenfalls eine Jordan-messbare Menge, d.h. $M \times N \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{m+n})$. Ihr Volumen ist gegeben durch

$$\text{vol}_{m+n}(M \times N) = \text{vol}_m(M) \cdot \text{vol}_n(N).$$

Beweis. Wieder lässt sich ein direkter Beweis führen. Ich begnüge mich aber an dieser Stelle damit darauf hinzuweisen, dass dieser Satz ein Spezialfall des Satzes von Fubini (Satz 1.8) ist. \square

1.2 Das mehrdimensionale Riemann-Integral

1.2.1 Integration über Elementarmengen

Die Definition des Riemann-Integrals über einer Elementarmenge stimmt fast buchstäblich mit der eindimensionalen Definition überein. Es lohnt sich die Ausführungen in diesem Abschnitt mit dem eindimensionalen Fall, der aus der *MfP2* bekannt ist, zu vergleichen.

Definition 1.4. Ist $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion über der Elementarmenge $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ und \mathcal{Z} eine Zerlegung von E , so heißen

$$U(f; \mathcal{Z}) := \sum_{Q \in \mathcal{Z}} m_Q(f) \operatorname{vol}_n(Q), \quad m_Q(f) = \inf_{x \in Q} f(x), \text{ und}$$

$$O(f; \mathcal{Z}) := \sum_{Q \in \mathcal{Z}} M_Q(f) \operatorname{vol}_n(Q), \quad M_Q(f) = \sup_{x \in Q} f(x)$$

die **untere** bzw. **obere Darboux-Summe** von f bezüglich \mathcal{Z} .

Lemma 1.3. Sei $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion über der Elementarmenge $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

(i) Ist \mathcal{Z}' eine Verfeinerung der Zerlegung \mathcal{Z} von E , dann ist

$$-\infty < U(f; \mathcal{Z}) \leq U(f; \mathcal{Z}') \leq O(f; \mathcal{Z}') \leq O(f; \mathcal{Z}) < \infty.$$

(ii) Sind \mathcal{Z} und \mathcal{Z}' zwei Zerlegungen von E , so gilt

$$U(f; \mathcal{Z}) \leq O(f; \mathcal{Z}').$$

Beweis. Die Beschränktheit der Darboux-Summen folgt direkt aus der Beschränktheit der Elementarmenge E und der Funktion f . Weiterhin garantieren die Definition des Supremums und Infimums, dass

$$\underbrace{\inf_{x \in Q} f(x)}_{m_Q} \leq \underbrace{\inf_{x \in Q'} f(x)}_{m_{Q'}} \leq \underbrace{\sup_{x \in Q'} f(x)}_{M_{Q'}} \leq \underbrace{\sup_{x \in Q} f(x)}_{M_Q}$$

für alle $Q \in \mathcal{Z}$ und $Q' \in \mathcal{Z}'$ mit $Q' \subset Q$ gilt. Da weiterhin $\operatorname{vol}_n(Q)$ gleich der Summe aller Volumina der Teilquader von Q ist, folgt die Behauptung (i).

Behauptung (ii) folgt nun durch zweifaches Anwenden dieser Abschätzung bezüglich der gemeinsamen Verfeinerung \mathcal{Z}'' von \mathcal{Z} und \mathcal{Z}' :

$$U(f; \mathcal{Z}) \leq U(f; \mathcal{Z}'') \leq O(f; \mathcal{Z}'') \leq O(f; \mathcal{Z}'). \quad \square$$

Für eine beschränkte Funktion $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ über der Elementarmenge $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ heißen nun

$$\int_{*E} f(x) \, dx := \sup_{\mathcal{Z}} U(f; \mathcal{Z}) \quad \text{bzw.} \quad \int_E^* f(x) \, dx := \inf_{\mathcal{Z}} O(f; \mathcal{Z})$$

das **Unterintegral** bzw. **Oberintegral** von f über E . Das vorangegangene Lemma 1.3 zeigt, dass

$$-\infty < \int_{*E} f(x) \, dx \leq \int_E^* f(x) \, dx < \infty.$$

Definition 1.5. Eine beschränkte Funktion $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ über einer Elementarmenge $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ heißt **(Riemann-)integrierbar**, wenn ihr Unter- und Oberintegral übereinstimmen. In diesem Fall nennen wir den gemeinsamen Wert $\int_E f(x) dx = \int_E^* f(x) dx$ das **(Riemann-)Integral** von f über E und schreiben für diesen Wert

$$\int_E f(x) dx = \int_E f(x) dx_1 \cdots dx_n.$$

1.2.2 Integration über beschränkte Integrationsgebiete

Analog zum Vorgehen bei der Definition des Volumens leiten wir nun einen Integralbegriff für beschränkte Funktion über beschränkten Mengen her. Damit wir unsere Definition formulieren können benötigen wir noch die folgenden Verabredungen: Gegeben seien Mengen $\Omega, Q \subset \mathbb{R}^n$ mit $\Omega \subset Q$ und eine Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Gilt für eine Funktion $\tilde{f}: Q \rightarrow \mathbb{R}$, dass $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega$ ist, dann heißt \tilde{f} **Fortsetzung** von f . Weiterhin ist die **charakteristische Funktion** $\chi_\Omega: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ von Ω (auch **Indikatorfunktion**) definiert durch

$$\chi_\Omega(x) := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x \in \Omega, \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Lemma 1.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Die Menge der Unstetigkeitsstellen von χ_Ω ist $\partial\Omega$.

Beweis. Übung! □

Definition 1.6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge und $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $\Omega \subset Q$. Weiterhin sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $\tilde{f}: Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Fortsetzung von f . Ist $\chi_\Omega \tilde{f}$ über Q Riemann-integrierbar, dann sagen wir, dass f über Ω **(Riemann-)integrierbar** ist und definieren das **Riemann-Integral** von f über Ω durch

$$\int_\Omega f(x) dx := \int_Q (\chi_\Omega \tilde{f})(x) dx = \int_Q \chi_\Omega(x) \tilde{f}(x) dx.$$

Die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen über Ω bezeichnen wir mit $\mathcal{R}(\Omega)$.

Anmerkung 1.3. Wie in der MfP2 lässt sich das Riemann-Integral durch komponentenweise Integration auf vektorwertige und komplexwertige Funktionen erweitern. Zum Beispiel ist für eine Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ das Riemann-Integral gegeben durch

$$\int_\Omega f(x) dx = \begin{pmatrix} \int_\Omega f_1(x) dx \\ \vdots \\ \int_\Omega f_n(x) dx \end{pmatrix}$$

vorausgesetzt, dass alle Koordinatenfunktionen $f_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-Integrierbar sind. Die entsprechenden Mengen der Riemann-integrierbaren Funktionen bezeichnen wir dann mit $\mathcal{R}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ bzw. $\mathcal{R}(\Omega; \mathbb{C})$.

Anmerkung 1.4. Viele Beispiele die wir im Folgenden betrachten werden, sind physikalisch motiviert. Hierbei kann es für das Verständnis nützlich sein, die physikalischen Einheiten der betrachteten Größen im Kopf zu behalten. Deshalb werden wir für diese Beispiele:

- Die SI-Einheiten vermerken. Zum Beispiel, bezeichnet $m: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kg eine *Masse*-wertige (auch kg-wertige) Funktion über der Menge Ω .

- Die Dimension einer physikalischen Größe x bezeichnen wir auch mit $[x] = [\text{Einheit}]$. In unserem Beispiel ist die Dimension $[m] = [\text{kg}] = \mathbf{Masse}$. Die Notation für die verwendeten Basisgrößen ist der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Basisgröße	Symbol	SI Einheit
Zeit	T	s (Sekunden)
Länge	L	m (Meter)
Masse	M	kg (Kilogramm)
elektrische Stromstärke	I	A (Ampere)

Tabelle 1.1. Notation für Basisgrößen und SI-Einheiten.

- Per Konvention multipliziert sich die Dimension einer Größe nach Integration über eine n -dimensionale Menge Ω mit $[m^n] = L^n$ (siehe folgende Beispiele). Eine Ausnahme stellen Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dar, welche wir gelegentlich auch als Zeitabschnitte interpretieren werden. In diesem Fall multipliziert sich die Dimension nach Integration mit $[s] = T$.

Beispiel 1.4 — Volumen. Sei $\Omega \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ Jordan-messbar. Dann ist χ_Ω Riemann-integrierbar mit

$$\text{vol}_n(\Omega) = \int_{\Omega} \chi_{\Omega}(x) \, dx.$$

Beispiel 1.5 — Schwerpunktberechnung. Wir betrachten einen dreidimensionalen Körper $K \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ mit gegebener Massendichte $\rho \in \mathcal{R}(\Omega; \mathbb{R} \text{ kg/m}^3)$. Die Gesamtmasse des Körpers ist dann gegeben durch

$$M := \int_K \rho(x) \, dx \in \mathbb{R}(\text{kg/m}^3)\text{m}^3 = \mathbb{R} \text{ kg}.$$

Der Schwerpunkt von K ist nun das *mit der Masse gewichtete Mittel der Position seiner „Massenpunkte“*. Wenn $x = (x_1, x_2, x_3) : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ m die Koordinatenfunktion bezeichnet, dann berechnet sich der Schwerpunkt durch

$$\underbrace{\frac{1}{M}}_{\in \mathbb{R} \text{ 1/kg}} \cdot \underbrace{\int_K x \rho(x) \, dx}_{\in \mathbb{R}^3 \text{ m} \cdot \text{kg}} \in \mathbb{R}^3 \text{ m}.$$

Welche Funktionen sind nun Riemann-integrierbar? Der folgende Satz gibt eine sehr intuitive Antwort: „Wenn die Funktion hinreichend stetig ist, oder anders gesagt, nicht zu sehr zappelt.“

Satz 1.5 — Lebesgue-Kriterium für Riemann-Integrierbarkeit. Eine Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ über einer Elementarmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge ist.

Wir werden uns mit diesem Kriterium genauer in Abschnitt 1.2.5 beschäftigen. Zuerst wollen wir uns aber ein wenig mehr mit dem mehrdimensionalen Riemann-Integral vertraut machen.

Korollar 1.1. Jede stetige Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ über einer Jordan-messbaren Menge $\Omega \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ ist Riemann-integrierbar.

Beweis. Da f stetig ist, sind die Unstetigkeitsstellen von f höchstens die Unstetigkeitsstellen von χ_Ω . Diese sind nach Lemma 1.4 durch den Rand $\partial\Omega$ von Ω gegeben, welcher nach Satz 1.2 eine Jordan-Nullmenge, insbesondere eine Nullmenge ist. \square

Für das mehrdimensionale Riemann-Integral gelten die gleichen Rechenregel, die schon aus der *MfP2* für das eindimensionale Integral bekannt sind.

Satz 1.6 — Rechenregeln für das Integral. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge, $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Rechenregeln:

- (i) $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(\Omega)$, $fg \in \mathcal{R}(\Omega)$, $|f| \in \mathcal{R}(\Omega)$;
- (ii) $\int_{\Omega} (\alpha f + \beta g) \, dx = \alpha \int_{\Omega} f \, dx + \beta \int_{\Omega} g \, dx$;
- (iii) Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in \Omega$ (schreibe $f \leq g$), dann gilt $\int_{\Omega} f \, dx \leq \int_{\Omega} g \, dx$;
- (iv) Ist Ω Jordan-messbar, dann gilt $\int_{\Omega} f \, dx \leq \text{vol}_n(\Omega) \cdot \sup_{x \in \Omega} f(x)$.

Beweis. Die Aussage über Integrierbarkeit in (i) folgen direkt aus den Rechenregeln für Stetigkeitsstellen einer Funktion und dem Lebesgue-Kriterium für Riemann-Integrierbarkeit (Satz 1.5).

Die Linearität (ii) folgt aus der Subadditivität des Supremums ($\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$) und der Superadditivität des Infimums ($\inf f + \inf g \leq \inf(f + g)$). Vergleiche auch mit *MfP2*.

Um Aussage (iii) zu zeigen, beobachten wir zuerst, dass für beliebige beschränkte Funktion aus $f \leq g$ unmittelbar $O(\chi_{\Omega} f; \mathcal{Z}) \leq O(\chi_{\Omega} g; \mathcal{Z})$ für alle Zerlegungen \mathcal{Z} eines Quaders $Q \subset \mathbb{R}^n$ mit $\Omega \subset Q$ folgt. Damit gilt aber für die Oberintegrale $\int_{\Omega}^* f \, dx \leq \int_{\Omega}^* g \, dx$. Da f und g nach Voraussetzung Riemann-integrierbar sind, gilt die Aussage dann auch für ihr Integral.

Die verbleibende Aussage (iv) folgt nun aus (iii) und Beispiel 1.4. □

Korollar 1.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge. Dann ist $\mathcal{R}(\Omega)$ ein \mathbb{R} -Vektorraum und das Riemann-Integral ist ein monotones, lineares Funktional auf $\mathcal{R}(\Omega)$.

Es ist von Interesse zu verstehen, auf welchen Teilmengen von Ω wir einen Integranden abändern können, ohne den Wert seines Integrals zu verändern. Der folgende Satz gibt eine teilweise Antwort.

Satz 1.7. Ist $N \subset \Omega$ eine Jordan-Nullmenge und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann ist $\chi_N f$ Riemann-integrierbar und $\int_{\Omega} \chi_N f \, dx = 0$.

Beweis. Wir setzen $C := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$. Dann ist $C\chi_N$ eine Majorante von $|f\chi_N|$, d.h. $|f\chi_N| \leq C\chi_N$. Es folgt

$$\int_{\Omega} |f\chi_N| \, dx \leq \int_{\Omega} C\chi_N \, dx = C \cdot \text{vol}_n(N) = 0. \quad \square$$

Die Aussage folgt, da $-\int_{\Omega} |f\chi_N| \, dx \leq \int_{\Omega} f\chi_N \, dx \leq \int_{\Omega} |f\chi_N| \, dx$.

Wir können also jede Riemann-integrierbare Funktion $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ auf jeder Jordan-Nullmenge $N \subset \Omega$ beliebig abändern, solange sie beschränkt bleibt (eine Voraussetzung, die per Definition der Riemann-Integrierbarkeit gilt). Leider lässt sich dieser Satz nicht auf beliebige Nullmengen erweitern, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1.6. Wir definieren die Funktionen $f, g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) := \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ und

$$g(x) := \begin{cases} 1/q & \text{, wenn } x = p/q \text{ für teilerfremde } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion f heißt *Dirichlet-Funktion* und g ist die *thomaesche Funktion*. Beide sind nur auf der Nullmenge $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ ungleich 0. Doch die thomaesche Funktion ist Riemann-integrierbar (*Übung!*), wohingegen die Dirichlet-Funktion nicht Riemann-integrierbar ist (vgl. *MfP2*).

Anmerkung 1.5. Die Asymmetrie zwischen den benötigten Nullmengen-Begriffen in Satz 1.5 (Lebesgue-Kriterium) und Satz 1.7 ist unvoreteilhaft. Das *Lebesgue-Integral* verschafft hier Abhilfe. Für alle Riemann-integrierbaren Funktionen stimmt das Lebesgue-Integral mit dem Riemann-Integral überein, aber wir können mithilfe des Lebesgue-Integrals Satz 1.7 auf allgemeine Nullmengen erweitern. Tatsächlich zeigt dieser Zusammenhang, dass das Riemann-Integral einer beliebigen Funktion über eine Nullmenge immer entweder = 0 oder *nicht definiert* ist.

1.2.3 Der Satz von Fubini

Wie können wir nun mehrdimensionale Integrale ausrechnen, ohne jedes mal die (dafür nicht sehr bequeme) Definition mittels Darboux-Summen zu verwenden? In der *MfP2* habt ihr viele Regeln und Stammfunktionen für eindimensionale Integrale kennengelernt. Es wäre praktisch unser mehrdimensionales Integral auf diesen Fall zurückführen zu können, es wird auch von *iterierten Integralen* gesprochen. Der folgende Satz erfüllt uns diesen Wunsch.

Vorlesung 4
(24.10.24)

Satz 1.8 — Satz von Fubini. Seien $X \subset \mathbb{R}^m$ und $Y \subset \mathbb{R}^n$ Quader und $Q = X \times Y$. Ist $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion, dann gilt

$$\int_Q f(x, y) \, dx dy = \int_X \left(\int_Y f(x, y) \, dy \right) dx = \int_Y \left(\int_X f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Anmerkung 1.6. Die Notation in diesem Satz benötigt ein wenig zusätzliche Erklärung, da der Integrand $\int_Y f(x_0, y) \, dy$ nicht notwendiger Weise für alle $x_0 \in X$ existieren muss. Die Intuition sagt uns, dass diese Probleme nur auf einer (Jordan-)Nullmenge auftreten können, und somit kein Problem im Sinne eines Integrals auftritt (vgl. Satz 1.7). Im Folgenden werden wir all diese technischen Schwierigkeiten vermeiden, indem wir für das „innere Integral“ Ober- bzw. Unterintegrale verwenden.

Beweis von Satz 1.8. Wir beweisen hier nur die erste Gleichheit. Die zweite Gleichheit kann ganz analog gezeigt werden (Variablentausch „ $x \leftrightarrow y$ “).

Um die Übersichtlichkeit des Beweises zu verbessern definieren wir uns für jedes $x_0 \in X$ die Hilfsfunktion

$$f_{x_0}: Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto f(x_0, y).$$

Weiterhin seien $F_*: X \rightarrow \mathbb{R}$ und $F^*: X \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F_*(x) := \int_Y^* f(x, y) \, dy = \int_Y^* f_x(y) \, dy \quad \text{und} \\ F^*(x) := \int_Y^* f(x, y) \, dy = \int_Y^* f_x(y) \, dy.$$

Da nach Voraussetzung f Riemann-integrierbar ist, folgt die Aussage, sobald wir

$$\int_Q^* f(x, y) \, dx dy \stackrel{(1)}{\leq} \int_X^* F_*(x) \, dx \stackrel{(2)}{\leq} \int_X^* F_*(x) \, dx \stackrel{(3)}{\leq} \int_X^* F^*(x) \, dx \stackrel{(4)}{\leq} \int_Q^* f(x, y) \, dx dy$$

gezeigt haben. Dabei folgen (2) und (3) direkt aus den Monotonie-Eigenschaften von Unter- und Oberintegralen und den Rechenregeln für das Riemann-Integral (Satz 1.6). Wir müssen also nur noch (1) und (4) zeigen. Da beide Abschätzungen analog gezeigt werden können, beschränke ich mich darauf den (1) herzuleiten.

Seien nun \mathcal{I}_X und \mathcal{I}_Y Zerlegungen von X bzw. Y . Dann ist

$$\mathcal{I} := \{Q_X \times Q_Y : Q_X \in \mathcal{I}_X, Q_Y \in \mathcal{I}_Y\}$$

eine Zerlegung von Q . Die untere Darboux-Summe von f bzgl. \mathcal{I} ist definiert durch

$$\begin{aligned} U(f; \mathcal{I}) &= \sum_{Q_X \times Q_Y} \overbrace{m_{Q_X \times Q_Y}(f)}^{\inf_{(x,y) \in Q_X \times Q_Y} f(x,y)} \cdot \underbrace{\text{vol}_{m+n}(Q_X \times Q_Y)}_{\text{vol}_m(Q_X) \text{vol}_n(Q_Y)} \\ &= \sum_{Q_X} \left(\sum_{Q_Y} m_{Q_X \times Q_Y}(f) \text{vol}_n(Q_Y) \right) \text{vol}_m(Q_X). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Wir schätzen nun zuerst die innere Summe über Q_Y ab. Sei dafür $x_0 \in Q_X$. Dann ist $\{x_0\} \times Q_Y \subset Q_X \times Q_Y$ und direktes Nachrechnen zeigt

$$\sum_{Q_Y} m_{Q_X \times Q_Y}(f) \text{vol}_n(Q_Y) \leq \sum_{Q_Y} \overbrace{m_{Q_Y}(f_{x_0})}^{\inf_{y \in Q_Y} f(x_0,y)} \text{vol}_n(Q_Y) = U(f_{x_0}; \mathcal{I}_Y) \leq \int_{*Y} f_{x_0}(y) dy.$$

Die rechte Seite ist nach Definition $F_*(x_0)$. Da diese Abschätzung für beliebiges x_0 gilt, folgt $\sum_{Q_Y} m_{Q_X \times Q_Y}(f) \text{vol}_n(Q_Y) \leq \inf_{x_0 \in Q_X} F_*(x_0) =: m_{Q_X}(F_*)$. Setzen wir diese Abschätzung in (1.3) ein so folgt für die Untersummen

$$U(f; \mathcal{I}) \leq \sum_{Q_X} m_{Q_X}(F_*) \text{vol}_m(Q_X) = U(F_*; \mathcal{I}_X).$$

Da wir aber keine Voraussetzungen an die Zerlegungen gestellt haben, gilt diese Abschätzung auch für die Unterintegrale, d.h. Abschätzung (1). \square

Beispiel 1.7 — „Integral zwischen Graphen“. Sei $\Omega \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ Jordan-messbar, Q ein Quader mit $\Omega \subset Q$ und seien $\varphi_1, \varphi_2: \Omega \rightarrow [a, b]$ stetig mit $\varphi_1 \leq \varphi_2$. Wir definieren

$$\Omega' := \{(x, h) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \Omega, \varphi_1(x) \leq h \leq \varphi_2(x)\}.$$

Die charakteristische Funktion von Ω' erfüllt $\chi_{\Omega'}(x, h) = \chi_{\Omega}(x) \cdot \chi_{[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]}(h)$. Es folgt, dass Ω' Jordan-messbar ist, d.h. $\Omega' \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n+1})$, und für $f \in \mathcal{R}(\Omega')$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} f(x, h) dh dx &= \int_{Q \times [a,b]} \chi_{\Omega'}(x, h) f(x, h) dh dx \\ &= \int_Q \chi_{\Omega}(x) \left(\int_a^b \chi_{[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]}(h) f(x, h) dh \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, h) dh \right) dx. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\text{vol}_{n+1}(\Omega') = \int_{\Omega} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \chi_{\Omega'}(x, h) dh dx$.

Aus dem Satz von Fubini können wir nun eine Verallgemeinerung der „multiplikativen“ Rechenregel des Volumens (Satz 1.4) ableiten.

Korollar 1.3 — Prinzip von Cavalieri. Sei $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein Quader und $\Omega \subset Q \times [a, b]$ Jordanmessbar. Für jedes $y \in [a, b]$ setzen wir $\Omega_y = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega : \tilde{y} = y\}$. Dann ist

$$\text{vol}_n(\Omega) = \int_a^b \text{vol}_{n-1}(\Omega_y) \, dy.$$

Hierbei muss wieder der Integrand wie in Anmerkung 1.6 erklärt interpretiert werden (siehe auch Beispiel 1.4).

1.2.4 Parameterintegrale

Ein physikalisches System kann von vielen verschiedenen Größen abhängen. Dabei ist es oft so, dass wir nur über einen Teil dieser Größen integrieren wollen (z.B. Orts-Koordinaten) und den Rest (sogenannte *Parameter*, z.B. Zeit, Dichte, Viskosität, ...) während der Integration festhalten möchten. Die aus der Integration resultierende Größe (z.B. Volumen, Masse, ...) ist nun natürlich eine Funktion in diesen Parametern und wird als **Parameterintegral** bezeichnet. Fragen der Stetigkeit und Differenzierbarkeit (nach den Parametern) liegen nun auf der Hand. Der folgende Satz gibt Antworten.

Vorlesung 5
(29.10.24)

Satz 1.9 — Leibnizregel für Parameterintegrale. Sei $\Omega \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^m)$ eine kompakte Menge und $I \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ eine offene Menge. Weiterhin sei $f: \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:

- (i) Ist f stetig auf ganz $\Omega \times I$, dann existiert das Parameterintegral $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ und ist stetig, wobei

$$F(t) := \int_{\Omega} f(x, t) \, dx.$$

- (ii) Existieren zusätzlich alle partiellen Ableitungen $\partial_t f = (\partial_{t_1} f, \dots, \partial_{t_n} f)$ und sind stetig auf ganz $\Omega \times I$, so ist das Parameterintegral F stetig differenzierbar auf I . Weiterhin ist die Ableitung von F im Punkt $t^* \in I$ gegeben durch

$$dF(t^*) = \int_{\Omega} \partial_t f(x, t^*) \, dx = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} \partial_{t_1} f(x, t^*) \, dx \\ \vdots \\ \int_{\Omega} \partial_{t_n} f(x, t^*) \, dx \end{pmatrix}.$$

Anmerkung 1.7. Die Bedingungen an Ω (Kompaktheit) und f (Stetigkeit, insbesondere inklusive $\partial\Omega$) sind sehr stark. Diese Version des Satzes sollte als „lokale“ Variante (also in einer kleinen kompakten Umgebung eines Punktes) interpretiert werden. In der Praxis kann es dann aber gut passieren, dass wir zwar wissen, dass f im Inneren von Ω stetig ist, wir aber keine Möglichkeit haben etwas über die Stetigkeit auf dem Rand $\partial\Omega$ auszusagen. Hier findet sich eine weitere Motivation für das Lebesgue-Integral. Es ermöglicht sehr viel allgemeinere Aussagen darüber, wann wir Integration und Grenzwertbildung vertauschen dürfen („ $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, dx = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, dx$ “). Dadurch können dann die Bedingungen für diesen Satz stark abgeschwächt werden.

Anmerkung 1.8. Eine kleine Erinnerung: Eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ über einer Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle $x, y \in U$ mit $\|x - y\| < \delta$ gilt. Insbesondere ist δ hier, im Gegensatz zur „gewöhnlichen“ Stetigkeit, nicht abhängig von x (also „ortsunabhängig“).

Beweis von Satz 1.9.

- (i) Sei $t^* \in I$ fest gewählt. Um die Stetigkeit von F in t^* zu zeigen, müssen wir

$$|F(t) - F(t^*)| = \left| \int_{\Omega} f(x, t) - f(x, t^*) \, dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x, t) - f(x, t^*)| \, dx \quad (1.4)$$

in Abhängigkeit von $\|t - t^*\|$ abschätzen. Insbesondere soll diese Abschätzung nicht von x abhängen („Ortsunabhängigkeit“).

Nach Voraussetzung ist I offen. Somit gibt es eine abgeschlossene Kugel

$$\overline{\mathbb{B}_r^n(t^*)} := \{t \in I : \|t - t^*\| \leq r\}$$

mit Mittelpunkt t^* und Radius $r > 0$, die vollständig in I liegt, d.h. $\overline{\mathbb{B}_r^n(t^*)} \subset I$. Es folgt, dass $\Omega \times \overline{\mathbb{B}_r^n(t^*)}$ kompakt ist (Ω ist nach Voraussetzung kompakt). Aus der *MfP2* ist bekannt (*sonst Übung!*), dass damit f eingeschränkt auf $\Omega \times \overline{\mathbb{B}_r^n(t^*)}$ gleichmäßig stetig ist (*siehe Anmerkung 1.8*). Damit finden wir für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass

$$|f(x, t) - f(x, t^*)| < \epsilon$$

für alle $(x, t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{B}_r^n(t^*)}$ mit $\|t - t^*\| < \delta$. Insbesondere ist diese Abschätzung ortsunabhängig! Einsetzen in (1.4) und ausnutzen der Rechenregeln für das Integral (Satz 1.6) ergibt

$$|F(t) - F(t^*)| \leq \int_{\Omega} \epsilon \chi_{\Omega}(x) \, dx = \epsilon \operatorname{vol}_n(\Omega).$$

Da $\operatorname{vol}_n(\Omega)$ eine Konstante ist, folgt die Stetigkeit des Parameterintegrals in t^* .

- (ii) Wir bemerken zuerst, dass

- aus der *MfP2* bekannt ist, dass die stetige Differenzierbarkeit von F aus der Existenz und Stetigkeit aller partiellen Ableitung $\partial_t f$ folgt. Es reicht also wenn wir den Fall $n = 1$ zeigen;
- wenn wir die Identität

$$\frac{d}{dt} F(t^*) = \int_{\Omega} \partial_t f(x, t^*) \, dx \quad (1.5)$$

zeigen, so haben wir die Existenz gezeigt, denn die rechte Seite existiert nach unseren Stetigkeitsbedingungen an $\partial_t f$. Weiterhin folgt dann die Stetigkeit von dF aus Teil (i).

Wählen wir also wieder $t^* \in I$. Um (1.5) zu zeigen müssen wir

$$\left| \frac{F(t) - F(t^*)}{t - t^*} - \int_{\Omega} \partial_t f(x, t^*) \, dx \right| \leq \int_{\Omega} \left| \frac{f(x, t) - f(x, t^*)}{t - t^*} - \partial_t f(x, t^*) \right| \, dx \quad (1.6)$$

in Abhängigkeit von $\|t - t^*\|$ abschätzen (*wieder unabhängig von x !*). Hierfür wollen wir wieder den Integranden auf der rechten Seite abschätzen. Genauso wie im vorangegangenen Teil finden wir ein $r > 0$, sodass $\overline{\mathbb{B}_r^n(t^*)} \subset I$, und somit für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass

$$|\partial_t f(x, t) - \partial_t f(x, t^*)| < \epsilon$$

für alle $(x, t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{B}_r^n(t^*)}$ mit $\|t - t^*\| < \delta$. Wir sind fertig, wenn wir den Differenzenquotienten in (1.6) durch eine geeignete partielle Ableitung ersetzen können. In der Tat erlaubt uns der Mittelwertsatz der Differentialrechnung (*an dieser Stelle benutzen wir, dass $n = 1$ ist!*) für jedes $(x, t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{B}_r^n(t^*)}$ ein $\xi_{(x,t)} \in \mathbb{B}_\delta^n(t^*)$ zu finden, mit

$$\partial_t(x, \xi_{(x,t)}) = \frac{f(x, t) - f(x, t^*)}{t - t^*}. \quad \square$$

1.2.5 Lebesgue-Kriterium für Riemann-Integrierbarkeit

Dieser Abschnitt ist dem Beweis des Lebesgue-Kriteriums für die Riemann-Integrierbarkeit einer Funktion gewidmet (Satz 1.5). Für den Rest des Abschnittes wird $E \subset \mathbb{R}^n$ immer eine *kompakte Elementarmenge* und $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion sein. Eine kompakte Elementarmenge ist dabei der Abschluss einer wie in Definition 1.1 definierten Elementarmenge. Wir hatten bereits die Intuition für das Lebesgue-Kriterium angesprochen:

*Eine Riemann-integrierbare Funktion sollte nicht zu stark „zappeln“,
oder anders gesagt, hinreichend stetig sein.*

Um diese Intuition formal greifbar zu machen, benötigen wir den folgenden „Unstetigkeitsmesser“ der euch noch aus der *MfP2* bekannt sein sollte.

Definition 1.7. Die **Oszillation** $\text{osc}(f; x^*)$ von f in $x^* \in E$ ist definiert durch

$$\text{osc}(f; x^*) := \lim_{\delta \rightarrow 0} M_{\mathbb{B}_\delta^n(x^*)}(f) - m_{\mathbb{B}_\delta^n(x^*)}(f),$$

wobei $M_{\mathbb{B}_\delta^n(x^*)}(f)$ und $m_{\mathbb{B}_\delta^n(x^*)}(f)$ wie in Definition 1.4 definiert sind.

Anmerkung 1.9. Die Oszillation ist wohldefiniert, denn die Differenz $M_{\mathbb{B}_\delta^n(x^*)}(f) - m_{\mathbb{B}_\delta^n(x^*)}(f)$ ist immer nicht-negativ und mit monoton fallendem δ ist sie ebenfalls monoton fallend.

Lemma 1.5. Ist f in $x \in E$ stetig, so ist $\text{osc}(f; x) = 0$.

Beweis. Übung! □

Lemma 1.6. Für jedes $\epsilon > 0$ ist die Menge $U_\epsilon := \{x \in E : \text{osc}(f; x) \geq \epsilon\}$ kompakt.

Beweis. Übung! (Tipp: Satz von Heine–Borel; betrachtet das Komplement von U_ϵ .) □

Lemma 1.7. Angenommen es gibt ein $\epsilon > 0$, sodass $\text{osc}(f; x) < \epsilon$ für alle $x \in E$ gilt. Dann gibt es eine Zerlegung \mathcal{Z} von E , sodass

$$O(f; \mathcal{Z}) - U(f; \mathcal{Z}) < \epsilon \text{vol}_n(E)$$

für die obere und untere Darboux-Summe gilt.

Anmerkung 1.10. Wenn ihr an dieser Stelle genau die Definition einer Zerlegungen nachschaut (Definition 1.1), werdet ihr feststellen, dass wir keine Zerlegungen für kompakte Elementarmengen definiert haben. Das lässt sich aber leicht reparieren: Kompakte Quader $Q_1, \dots, Q_s \subset \mathbb{R}^n$ bilden eine Zerlegung der kompakten Elementarmenge E , wenn $E = \bigcup_{i=1}^s Q_i$ und $\text{int}(Q_i) \cap \text{int}(Q_j) = \emptyset$ für $i \neq j$, wobei $\text{int}(Q_i)$ das Innere von Q_i bezeichnet.

Beweis von Lemma 1.7. Nach Definition der Oszillation gibt es für jedes $x \in E$ einen (offenen) Quader $Q_x \ni x$, sodass

$$\sup_{x' \in Q_x \cap E} f(x') - \inf_{x' \in Q_x \cap E} f(x') < \epsilon.$$

Natürlich überdecken all diese „kleinen“ Quader (*überabzählbar viele!*) die Elementarmenge E , d.h. $E = \bigcup_{x \in Q} Q_x$. Nun können wir aber endlich viele dieser „kleinen“ Quader Q_{x_1}, \dots, Q_{x_s} auswählen und immer noch E überdecken, d.h. $E = \bigcup_{i=1}^s Q_{x_i}$, weil E nach Voraussetzung kompakt ist. Analog zu unseren Betrachtungen in Abschnitt 1.1.1 sehen wir, dass es eine Zerlegung \mathcal{Z} von E gibt, sodass jedes $Q \in \mathcal{Z}$ in einem Q_{x_i} liegt, d.h. $Q \subset Q_{x_i}$. Es folgt

$$\begin{aligned} O(f; \mathcal{Z}) - U(f; \mathcal{Z}) &= \sum_{Q \in \mathcal{Z}} \overbrace{(M_Q(f) - m_Q(f)) \operatorname{vol}_n(Q)}^{< \epsilon, \text{ weil } Q \subset Q_{x_i}} \\ &< \epsilon \sum_{Q \in \mathcal{Z}} \operatorname{vol}_n(Q) \\ &= \epsilon \operatorname{vol}_n(E). \end{aligned} \quad \square$$

Beweis des Lebesgue-Kriteriums (Satz 1.5).

„ \Rightarrow “: Nehmen wir zuerst an, dass $f \in \mathcal{R}(E)$. Wir wollen zeigen, dass die Menge $U \subset E$ der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge ist. Wir sehen, dass $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{1/i}$, wobei $U_{1/i}$ wie in Lemma 1.6 definiert ist. Es reicht also zu zeigen, dass jedes $U_{1/i}$ eine Nullmenge ist. In der Tat, da f integrierbar ist, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine Zerlegung \mathcal{Z} von E , sodass

$$O(f; \mathcal{Z}) - U(f; \mathcal{Z}) = \sum_{Q \in \mathcal{Z}} (M_Q(f) - m_Q(f)) \operatorname{vol}_n(Q) < \frac{\epsilon}{i}.$$

Definieren wir nun $\mathcal{U} := \{Q \in \mathcal{Z} : Q \cap U_{1/i} \neq \emptyset\}$, dann ist

$$\frac{1}{i} \sum_{Q \in \mathcal{U}} \operatorname{vol}_n(Q) < \sum_{Q \in \mathcal{U}} \overbrace{(M_Q(f) - m_Q(f)) \operatorname{vol}_n(Q)}^{< 1/i, \text{ nach Konstruktion}} \leq \frac{\epsilon}{i}.$$

Multiplizieren beider Seiten mit i zeigt das gewünschte.

„ \Leftarrow “: Nehmen wir nun an, dass die Menge $U \subset E$ der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge ist. Wir wollen zeigen, dass $f \in \mathcal{R}(Q)$. Sei $\epsilon > 0$. Wir haben unser Ziel erreicht, wenn wir eine Zerlegung \mathcal{Z}_ϵ von Q konstruieren können, für die

$$O(f; \mathcal{Z}_\epsilon) - U(f; \mathcal{Z}_\epsilon) = \sum_{Q \in \mathcal{Z}_\epsilon} (M_Q(f) - m_Q(f)) \operatorname{vol}_n(Q) < \epsilon. \quad (1.7)$$

Sei nun $M := \sup_{x \in E} |f(x)|$ und $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine Familie von (offenen) Quadern, die U überdecken ($U \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$) und $\sum_{i=k}^{\infty} \operatorname{vol}_n(Q_k) < \epsilon/(4M)$ erfüllen. Sei $\tilde{\epsilon} := \epsilon/(2 \operatorname{vol}_n(E))$. Dann überdecken schon endlich viele der Quader Q_{k_1}, \dots, Q_{k_s} die kompakte Menge $U_{\tilde{\epsilon}}$ (Lemma 1.6) und es gilt

$$\sum_{i=1}^s (M_{Q_{k_i}}(f) - m_{Q_{k_i}}(f)) \operatorname{vol}_n(Q_{k_i}) \leq 2M \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol}_n(Q_k) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Weiterhin ist $\tilde{E} := E \setminus \bigcup_{i=1}^s Q_{k_i}$ eine kompakte Elementarmenge und nach Konstruktion gilt $\text{osc}(f; x) < \tilde{\epsilon}$ für alle $x \in \tilde{E}$. Damit garantiert uns Lemma 1.7, dass es eine Zerlegung $\mathcal{Z}_{\tilde{E}}$ von \tilde{E} gibt, sodass

$$O(f|_{\tilde{E}}; \mathcal{Z}_{\tilde{E}}) - U(f|_{\tilde{E}}; \mathcal{Z}_{\tilde{E}}) < \tilde{\epsilon} \text{vol}_n(\tilde{E}) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Nach Konstruktion gibt uns dann $\mathcal{Z}_{\tilde{E}} \cup \{Q_{k_1}, \dots, Q_{k_s}\} =: \mathcal{Z}_\epsilon$ eine Zerlegung von E , die (1.7) erfüllt. \square

1.3 Der Transformationssatz

In diesem Abschnitt wird das Analogon der aus der *MfP2* bekannten eindimensionalen Substitutionsregel

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) \, du = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx$$

besprechen. Auch im Mehrdimensionalen tritt es häufig auf, dass wir gerne unsere Koordinaten transformieren möchten, um so unser Integrationsgebiet zu vereinfachen bzw. Symmetrien unseres Integranden zu nutzen. Dabei müssen wir aber die „Volumenverzerrung“ unserer Koordinatentransformation berücksichtigen. Es stellt sich heraus, dass der richtige „Korrekturfaktor“ durch den Betrag der sogenannten Funktionaldeterminante gegeben ist.

Definition 1.8. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar im Punkt $x_0 \in D$. Die Determinante des Differentials an der Stelle x_0 , also $\det d\varphi(x_0)$ heißt **Funktionaldeterminante** von φ in x_0 (auch *Jacobi-Determinante*).

1.3.1 Zwei Versionen des Satzes

Der folgende Satz gibt Aufschluss über das Transformationsverhalten des Integrals unter Koordinatentransformationen.

Satz 1.10 — Transformationssatz (für Diffeomorphismen). Seien $D, \tilde{D} \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte und offene Mengen. Weiterhin sei die Abbildung $\varphi: D \rightarrow \tilde{D}$ ein C^1 -Diffeomorphismus und $f \in \mathcal{R}(\tilde{D})$. Dann gilt:

- (i) Die Funktion $(f \circ \varphi) \cdot |\det d\varphi|$ ist Riemann-integrierbar über D ;
- (ii) und es gilt die **Transformationsformel**

$$\int_{\tilde{D}} f(y) \, dy = \int_D f(\varphi(x)) |\det d\varphi(x)| \, dx.$$

Anmerkung 1.11. Eine kleine Erinnerung: Die Abbildung φ ist ein C^k -Diffeomorphismus, $k \geq 1$, wenn φ bijektiv ist und sowohl φ als auch ihre Umkehrfunktion φ^{-1} k -mal stetig differenzierbar sind.

Anmerkung 1.12. Ein Hinweis zur Notation: Ich werde zwei Notationen für das Differential einer Funktion $\varphi: D \rightarrow \tilde{D}$ an der Stelle $x_0 \in D$ verwenden. Zum einen $d\varphi(x_0)$ zum anderen $d_{x_0}\varphi$. Das Differential ist dabei eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die Auswertung des Differentials entlang einer „Richtung“ $X \in \mathbb{R}^n$ schreibe ich dann als $d\varphi(x_0)(X)$ oder $d_{x_0}\varphi(X)$.

Beispiel 1.8. Betrachten wir ein Beispiel. Wir möchten gerne über dem Kreis $\tilde{D} := \{x^2 + y^2 \leq 4\}$ das Integral der Funktion $f: (x, y) \mapsto e^{-1/2(x^2+y^2)}$ berechnen. Es bietet sich an Polarkoordinaten zu verwenden (siehe Abschnitt 1.3.2), mit denen wir die Rotationssymmetrie des Exponenten ausnutzen können. Somit können wir mithilfe des Transformationssatzes das Integral als ein Integral über dem Rechteck $D := \{0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ schreiben. Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{D}} e^{-1/2(x^2+y^2)} dx dy &= \int_D r e^{-\frac{1}{2}r^2} dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^2 r e^{-\frac{1}{2}r^2} dr \\ &= 2\pi(1 - e^{-2}), \end{aligned}$$

wobei wir erst den Transformationssatz angewendet haben und dann das Integral mithilfe des Satzes von Fubini und der eindimensionalen Substitutionsformel vereinfacht haben.

Aber durften wir diese Rechnung überhaupt durchführen? Weder D noch \tilde{D} sind offene Mengen. Weiterhin geben die Polarkoordinaten auch keinen Diffeomorphismus von D nach \tilde{D} . Somit ist Satz 1.10 streng genommen nicht anwendbar. Allerdings sind die „Problembereiche“ lediglich der Rand ∂D von D und das entsprechende Bild $\varphi(\partial D)$ von diesem. Beides sind Jordan-Nullmengen, fallen also für das Integral nicht ins Gewicht (vgl. Satz 1.7). Die folgende verallgemeinerte Version des Transformationssatzes berücksichtigt diese Beobachtung.

Vorlesung 7
(05.11.24)

Satz 1.11 — Transformationssatz (für Diffeomorphismen bis auf Jordan-Nullmengen). Seien $D, \tilde{D} \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $N \subset D$ und $\tilde{N} \subset \tilde{D}$ Jordan-Nullmengen, sodass $D \setminus N$ und $\tilde{D} \setminus \tilde{N}$ offen sind. Weiterhin sei $\varphi: D \rightarrow \tilde{D}$ eine stetig Abbildung, sodass $\varphi|_{D \setminus N}$ ein C^1 -Diffeomorphismus von $D \setminus N$ auf $\tilde{D} \setminus \tilde{N}$ ist und es ein $M > 0$ gibt mit $|\det d\varphi(x)| \leq M$ für alle $x \in D \setminus N$. Dann gilt für jedes $f \in \mathcal{R}(\tilde{D})$:

- (i) Die Funktion $(f \circ \varphi) \cdot |\det d\varphi|$ ist Riemann-integrierbar über $D \setminus N$;
- (ii) und es gilt die **Transformationsformel**

$$\int_{\tilde{D}} f(y) dy = \int_D f(\varphi(x)) |\det d\varphi(x)| dx.$$

Beweis. Diese Verallgemeinerung folgt aus der vorangegangenen Version des Transformationssatzes (Satz 1.10), wobei wir die „Vernachlässigbarkeit“ von Jordan-Nullmengen im Bezug auf das Riemann-Integral ausnutzen (Satz 1.7). \square

Anmerkung 1.13. Im Kontext des Lebesgue-Integrals lässt sich der Transformationssatz tatsächlich sogar noch beweisen, wenn φ nur noch bijektiv und stetig differenzierbar ist (*keine Anforderungen an die Umkehrfunktion!*). Für die meisten praktischen Anwendungen reicht aber die zweite von uns formulierte Version des Satzes.

Korollar 1.4 — Guldin'sche Regel für Volumina. Das Volumen eines Rotationskörpers, der entsteht, wenn man eine ganz auf einer Seite der Rotationsachse gelegene Figur rotiert, ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt der Figur und der Länge des Weges, den der Schwerpunkt der Figur zurücklegt.

Beispiel 1.9 — Volumen eines Rotationstoros. Sei $0 < r_0 < R_0$. Wir betrachten die Mengen

$$T := \{(x, y, z) : (\sqrt{x^2 + y^2} - R_0)^2 + z^2 \leq r_0^2\} \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{und}$$

$$K := \{(x, 0, z) : x > 0, (x - R_0)^2 + z^2 \leq r_0^2\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Hier ist T der rotationssymmetrische *Volltorus*, der durch Rotation der vollständig in der Halbebene $\{(x, 0, z) : x > 0\}$ liegenden Kreisscheibe mit Radius r_0 und Zentrum $(R_0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ um die z -Achse entsteht. Wir wollen das Volumen von T berechnen. Ein Kreis lässt sich leicht mithilfe von Polarkoordinaten (*siehe* Abschnitt 1.3.2) parametrisieren. Durch ausnutzen der Rotationssymmetrie von T sehen wir, dass wir mithilfe der Abbildung

$$\varphi: \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto R_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$$

T über $\tilde{T} := \{0 \leq r \leq r_0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$ parametrisieren können, d.h. $\varphi(\tilde{T}) = T$. (*Übung: Überlegt euch wie φ „ausieht“. Es sind keine Kugelkoordinaten!*) Die Funktionaldeterminante von φ in (r, θ, ϕ) , $r > 0$, ist gegeben durch $\det(d\varphi(r, \theta, \phi)) = r(r \cos \phi + R_0)$. (*Übung: Nachrechnen!*) Diese Parametrisierung erfüllt die Bedingungen des Transformationssatzes (Satz 1.11). Somit rechnen wir nach, dass

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(T) &= \int_T \mathbf{1} \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_{\tilde{T}} r(r \cos \phi + R_0) \, dr \, d\theta \, d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} (r^2 \cos \phi + rR_0) \, dr \, d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{r_0^3 \cos \phi}{3} + \frac{R_0 r_0^2}{2} \, d\phi \\ &= 2\pi^2 r_0^2 R_0. \end{aligned}$$

Die Guldin'sche Regel hätte an dieser Stelle eine Abkürzung geboten: Der Flächeninhalt des Kreises K ist $\text{vol}_2(K) = \pi r_0^2$. Weiterhin ist der Schwerpunkt von K gegeben durch $(R_0, 0, 0)$ (*vgl.* Beispiel 1.5). Die Kurve die dieser unter der Rotation beschreibt ist der in der xy -Ebene gelegene und im Ursprung zentrierte Kreis mit Radius R_0 . Die Länge dieses Kreises ist $2\pi R_0$. Das Produkt aus diesem Flächeninhalt und der Länge entspricht genau dem von uns berechneten Volumen $\text{vol}_3(T)$.

1.3.2 Wichtige Parametrisierungen

In diesem Abschnitt sind einige häufig verwendete Parametrisierungen (Koordinaten) für die Ebene (\mathbb{R}^2) und den dreidimensionalen Raum (\mathbb{R}^3) aufgelistet. Zusätzlich findet ihr hier die zugehörigen Funktionaldeterminanten und maximalen Injektivitätsbereiche dieser Parametrisierungen an. Die Injektivitätsbereiche sind dabei nicht eindeutig. Sie können durch ausnutzen der Periodizitätseigenschaften der Sinus- und Kosinus-Funktion verändert werden.

Polarkoordinaten. Diese Koordinaten bieten eine alternative Parametrisierung der Ebene. Sie eignen sich besonders um Probleme mit einer (zentrierten) Rotationssymmetrie zu untersuchen.

- *Parametrisierung.* $\varphi: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi: \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

- *Funktionaldeterminante.* $\det(d\varphi(r, \theta)) = r$ für $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.
- *Max. Injektivitätsbereich.* φ bildet $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi)$ bijektiv auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ab.

Zylinderkoordinaten. Diese Koordinaten parametrisieren den dreidimensionalen Raum. Sie können als eine Erweiterung der Polarkoordinaten aufgefasst werden. Diese Koordinaten eignen sich besonders für Probleme die eine Rotationssymmetrie um eine Achse aufweisen.

- *Parametrisierung.* $\varphi: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi: \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ h \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ h \end{pmatrix}.$$

- *Funktionaldeterminante.* $\det(d\varphi(r, \theta, h)) = r$ für $(r, \theta, h) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- *Max. Injektivitätsbereich.* φ bildet $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ ab.

Kugelkoordinaten. Diese Koordinaten bieten alternative Koordinaten für den dreidimensionalen Raum. Sie eignen sich besonders für Probleme die invariant unter allen dreidimensionalen Rotationen sind, d.h., eine (zentrierte) Kugelsymmetrie aufweisen.

- *Parametrisierung.* $\varphi: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi: \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

- *Funktionaldeterminante.* $\det(d\varphi(r, \theta, \phi)) = r^2 \sin \theta$ für $(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- *Max. Injektivitätsbereich.* φ bildet $\mathbb{R}_+ \times (0, \pi) \times [0, 2\pi)$ bijektiv auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ ab.

1.3.3 Beweisskizze für den Transformationssatz

Wir werden an dieser Stelle den Beweis für den Transformationssatz unter Diffeomorphismen (Satz 1.10) diskutieren. Ich werde mich darauf beschränken eine Beweisskizze zu geben, die euch eine Intuition für den Ablauf des Beweises geben soll. An einigen Stellen werde ich Details auslassen. Diese Lücken werden sich aber stets (*Übung für Motivierte!*) mit den in diesem Kapitel diskutierten Inhalten „auffüllen“ lassen.

Das folgende Lemma stellt den ersten Schritt auf unserem Weg zu einem Beweis dar. Es bestimmt die Volumenverzerrung unter den „einfachsten“ Diffeomorphismen. In diesem Lemma können wir auch die Intuition finden, warum der „Korrekturfaktor“ für die Volumenverzerrung durch den Betrag der Funktionaldeterminante gegeben ist.

Lemma 1.8. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und Jordan-messbar und $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein linearer Isomorphismus, d.h. $\det T \neq 0$. Dann gilt

$$\text{vol}_n(T(D)) = |\det T| \text{vol}_n(D).$$

Beweis. Übung! (Tipp: Zeigt die Aussage erst für Quader. Überlegt euch hierfür, wie ihr mithilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens T durch Elementartransformationen darstellen könnt.) \square

Das folgende Lemma ist von technischer Natur. Es stellt Werkzeuge bereit, die wir im darauffolgenden Lemma benötigen.

Lemma 1.9. Seien $D, \tilde{D}, D' \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $\vartheta: D \rightarrow \tilde{D}$ und $\zeta: \tilde{D} \rightarrow D'$ C^1 -Diffeomorphismen. Wenn für ϑ und ζ der Transformationssatz gilt, dann auch für $\zeta \circ \vartheta$.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{R}(D')$. Wir rechnen nach, dass

$$\begin{aligned} \int_{(\zeta \circ \vartheta)(D)} f(x') \, dx' &= \int_{\vartheta(D)} f(\zeta(\tilde{x})) \, |\det d\zeta| \, d\tilde{x} \\ &= \int_D f(\zeta(\vartheta(x))) \, |\det d_{\vartheta(x)}\zeta| \, |\det d_x\vartheta| \, dx \\ &= \int_D f(\zeta(\vartheta(x))) \, |\det d_x(\zeta \circ \vartheta)| \, dx, \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Umformung den Determinanten Multiplikationssatz und die Kettenregel angewendet haben. \square

Mit dieser Vorarbeit gerüstet sind wir nun gerüstet die Volumenverzerrung unter allgemeinen C^1 -Diffeomorphismen zu bestimmen.

Lemma 1.10. Sei $D, \tilde{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $\varphi: D \rightarrow \tilde{D}$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Dann gibt es für jedes $x_0 \in D$ eine offene Umgebung $U \subset D$ von x_0 , sodass

$$\text{vol}_n(\varphi(U)) = \int_U |\det d_x\varphi| \, dx. \tag{1.9}$$

Beweis. Wir können ohne *o.B.d.A.* annehmen, dass $d_{x_0}\varphi = I_n$ ist. Ansonsten betrachten wir $\tilde{g} = (d_{x_0}\varphi)^{-1} \cdot g$. Das vorangegangene Lemma 1.8 zeigt, wie sich unter dieser Transformation das Volumen verändert. Wir beweisen die Aussage per Induktion über die Dimension n . Für $n = 1$ kennen wir den Transformationssatz aus der *MfP2* unter dem Namen „Substitutionsregel“. Hier müssen wir nichts mehr beweisen.

Es bleibt also der Induktionsschritt. Nehmen wir also an, dass es ein $n > 1$ gibt, sodass die Aussage für alle $1 \leq k < n$ gilt. Wir müssen sie nun für n zeigen. Wir definieren hierfür die Hilfsfunktionen

$$\vartheta: x \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(x) \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \zeta: x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ \varphi_n(\vartheta^{-1}(x)) \end{pmatrix}$$

Es gilt $\varphi = \zeta \circ \vartheta$ und wir rechnen nach, dass $d_{x_0}\vartheta = I_n$ ist (*Übung!*). Deshalb gibt es nach dem Umkehrsatz offene Umgebungen $\tilde{U} \subset D$ von x_0 und $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$, sodass $\vartheta|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ ein C^1 -Diffeomorphismus ist. Somit ist zum Einen ζ wohldefiniert, zum Anderen berechnen wir für die Ableitung von ζ in $\vartheta(x_0)$

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial x_i}(\vartheta(x_0)) = \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(a) \right) \cdot (d_{x_0}\vartheta)^{-1} \cdot e_i.$$

Aus unseren Annahmen folgt, dass $d\zeta(\vartheta(x_0)) = I_n$. Somit können wir wieder den Umkehrsatz verwenden und erhalten eine Umgebung $V \subset \vartheta(\tilde{U})$ von $\vartheta(x_0)$, sodass

$$\vartheta|_U: U \rightarrow V \quad \text{und} \quad \vartheta|_V: V \rightarrow W$$

C^1 -Diffeomorphismen sind, wobei $U := \vartheta^{-1}(V)$ und $W := \vartheta(V)$ sind.

Nun haben wir einen Kandidaten für die Umgebung U konstruiert. Tatsächlich können wir mithilfe der Induktionsannahme und dem Satz von Fubini nachrechnen (*Übung!*), dass der Transformationssatz für $\vartheta|_U$ und $\zeta|_V$ gilt. Es folgt also die Behauptung aus dem vorangegangenen Lemma 1.9. \square

Beweisskizze des Transformationssatzes (Satz 1.10). Für diese Beweisskizze werde ich annehmen, dass D und \tilde{D} Jordan-messbar sind. Im folgenden Abschnitt über uneigentliche Integration werden wir Techniken kennen lernen, wie wir diese Aussage auf allgemeinere offene Mengen ausweiten könnten.

Da \tilde{D} eine offene Jordan-messbare Menge ist, ist ihr Volumen ungleich 0 und wir können es folglich von Innen heraus durch (kompakte) Elementarmengen approximieren (*Übung!*). Wenn wir den Transformationssatz für diese Elementarmengen zeigen können, dann haben wir die Aussage gezeigt, da der Rand $\partial\tilde{D}$ von \tilde{D} nach Satz 1.2 eine Jordan-Nullmenge ist. Sei also nun $E \subset \tilde{D}$ eine (kompakte) Elementarmenge. Nach Lemma 1.10 finden wir für jeden Punkt in \tilde{D} eine offene Kugel, in der die Transformationsformel für Volumen (1.9) gilt. Da E kompakt ist, reichen endlich viele dieser Kugeln aus um ganz E zu überdecken. Somit gilt die Transformationsformel für Volumen (1.9) auch für E und Jordan-messbare Teilmengen von E . Sei nun \mathcal{Z} eine Zerlegung von E . Dann ist $\varphi^{-1}(E) = \bigcup_{Q \in \mathcal{Z}} \varphi^{-1}(Q)$ und $\varphi^{-1}(Q) \cap \varphi^{-1}(\tilde{Q})$ sind höchstens Jordan-Nullmengen für $Q \neq \tilde{Q}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} U(f; \mathcal{Z}) &= \sum_{Q \in \mathcal{Z}} m_Q(f) \operatorname{vol}_n(Q) \\ &= \sum_{Q \in \mathcal{Z}} m_Q(f) \int_Q \mathbf{1} \, dy \\ &= \sum_{Q \in \mathcal{Z}} m_Q(f) \int_{\varphi^{-1}(Q)} |\det d_x \varphi| \, dx \\ &= \sum_{Q \in \mathcal{Z}} \int_{*\varphi^{-1}(Q)} m_{\varphi^{-1}(Q)}(f \circ \varphi) |\det d_x \varphi| \, dx \\ &\leq \sum_{Q \in \mathcal{Z}} \int_{*\varphi^{-1}(Q)} f(\varphi(x)) |\det d_x \varphi| \, dx \\ &= \int_{*D} f(\varphi(x)) |\det d_x \varphi| \, dx \end{aligned}$$

Ganz analog gilt für die Oberintegrale: $\int_D^* f(\varphi(x)) |\det d_x \varphi| \, dx \geq O(f; \mathcal{Z})$. Es folgt

$$\int_{*D} f(y) \, dy \leq \int_{*D} f(\varphi(x)) |\det d_x \varphi| \, dx \leq \int_D^* f(\varphi(x)) |\det d_x \varphi| \, dx \leq \int_D^* f(y) \, dy$$

und somit der Transformationssatz, denn f ist nach Voraussetzung Riemann-integrierbar. \square

1.4 Uneigentliche Integration

Nach unseren bisherigen Betrachtungen ist Beschränktheit der Funktion als auch des Integrationsgebietes eine notwendige Bedingung für die Riemann-Integrierbarkeit. Allerdings sind wir in der Praxis häufig daran interessiert Integrale zu berechnen, bei denen einer oder beide dieser „Spieler“ unbeschränkt sind. Zum Beispiel könnten wir uns für das Gravitationspotential und das Gravitationsfeld, also

$$V(x) = - \int_A \frac{G}{\|x - x'\|} \rho(x') \, dx' \quad \text{und} \quad g(x) = -G \int_A \frac{x - x'}{\|x - x'\|^3} \rho(x') \, dx',$$

eines „Asteroide“ $A \subset \mathbb{R}^3$ mit Dichte $\rho: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ an der Stelle $x \in \mathbb{R}^3$ interessieren (G ist hier die *Gravitationskonstante*). Für $x \notin A$ können wir diese Integrale bereits ausrechnen, aber was passiert für $x \in A$? Schon in der *MfP2* habt ihr Beispiele dafür gesehen, wie wir solche Probleme im Eindimensionalen mithilfe von uneigentlichen Riemann-Integralen lösen können. Wir erweitern diese Überlegungen nun ins Mehrdimensionale.

1.4.1 Zerlegungen und Ausschöpfungen von offenen Mengen

Die Integrationsgebiete für unsere uneigentlichen Riemann-Integrale sollen durch offene Mengen des \mathbb{R}^n gegeben sein. Wie in der *MfP2* wollen wir das uneigentliche Integral durch das „eigentliche“ Integral approximieren. Dafür müssen wir verstehen, wie wir offene Mengen durch (bestimmte) beschränkte Mengen „approximieren“ können.

Definition 1.9. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere offene Menge. Eine **Zerlegung** von Ω ist eine Folge von kompakten Quadern $(Q_k)_{k=1}^\infty$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) Für alle $k \geq 1$ ist $Q_k \subset \Omega$;
- (ii) $Q_k \cap Q_l$ ist eine Jordan-Nullmenge für alle $k \neq l$;
- (iii) $\Omega = \bigcup_{k=1}^\infty Q_k$;
- (iv) Jede kompakte Teilmenge von Ω wird schon von endlich vielen der Quader überdeckt.

Es kann gezeigt werden, dass jede offene Menge auch eine Zerlegung besitzt, diese Definition also tatsächlich sinnvoll war. Wir werden diese Behauptung allerdings hier nicht beweisen.

Satz 1.12. Jede nicht-leere offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ besitzt eine Zerlegung in Quader.

In der Praxis wird eine andere Variante offene Mengen zu „approximieren“ wichtig sein.

Definition 1.10. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere offene Menge. Eine Folge $(\Omega_k)_{k=1}^\infty$ heißt **Ausschöpfung** von Ω , wenn

- (i) für alle $k \geq 1$ ist $\Omega_k \subset \Omega$ und kompakt;
- (ii) es gilt $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$, d.h. $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \dots$;
- (iii) $\Omega = \bigcup_{k=1}^\infty \Omega_k$.

Beispiel 1.10. Übliche Ausschöpfungen des \mathbb{R}^n sind

- die kompakten Quader $\Omega_k := [-k, k]^n$;
- die kompakten Kugeln $\Omega_k := \overline{\mathbb{B}_k(\mathbf{0})}$.

1.4.2 Das uneigentliche Riemann-Integral

Bevor wir das uneigentliche Riemann-Integral definieren können, müssen wir noch klären welche Funktionen wir für dieses Integral zulassen wollen. Da wir das uneigentliche Riemann-Integral durch eine Approximation aus „eigentlichen“ Integralen definieren wollen, bietet sich die folgende Definition an: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Eine Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **lokal Riemann-integrierbar**, wenn für jedes $x_0 \in \Omega$ eine $\rho_{x_0} > 0$ existiert, sodass die offene Kugel $\mathbb{B}_{\rho_{x_0}}^n(x_0) \subset \Omega$ ist und $f|_{\mathbb{B}_{\rho_{x_0}}^n(x_0)}$ Riemann-integrierbar ist. Analog heißt f **lokal beschränkt**, wenn $f|_{\mathbb{B}_{\rho_{x_0}}^n(x_0)}$ beschränkt ist. Das folgende Lemma hilft uns lokale Riemann-Integrierbarkeit zu charakterisieren.

Lemma 1.11. Eine Funktion f ist lokal Riemann-integrierbar genau dann, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge ist und f lokal beschränkt ist.

Beweis. Wir beobachten, dass jede lokal Riemann-integrierbare Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ über jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ Riemann-integrierbar ist (*Übung!*). Wenden wir diese Beobachtung auf eine Zerlegung von Ω an, so ist die Behauptung eine direkte Konsequenz aus dem Lebesgue-Kriterium (Satz 1.5). \square

Definition 1.11. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine lokal Riemann-integrierbare Funktion. Dann heißt f **uneigentlich Riemann-integrierbar**, wenn es eine Zerlegung $(Q_k)_{k=1}^\infty$ von Ω gibt, sodass die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \int_{Q_k} |f(x)| dx$ konvergiert. In diesem Fall nennen wir

$$\int_{\Omega} f(x) dx := \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Q_k} f(x) dx$$

das **uneigentliche Riemann-Integral** von f über Ω .

Die Forderung nach absoluter Konvergenz liegt in dem Wunsch begründet, dass das uneigentlich Integral nicht von der Zerlegung von Ω abhängen sollte und weiterhin linear und monoton sein sollte. Die folgenden Sätze zeigen, dass unsere Definition diese Wünsche erfüllt.

Satz 1.13. Das uneigentliche Riemann-Integral einer Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ hängt nicht von der Zerlegung der offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ab.

Beweis. Sei $(Q_k)_{k=1}^\infty$ eine Zerlegung von Ω für die $\sum_{k=1}^\infty \int_{Q_k} f(x) dx$ absolut konvergiert und $(\tilde{Q}_l)_{l=1}^\infty$ eine weitere Zerlegung von Ω . Wir beobachten, dass für jedes $k \geq 1$ der Schnitt $Q_k \cap Q_l$ aufgrund von Forderung (iv) an Zerlegungen nur für endlich viele $l \geq 1$ ungleich der leeren Menge ist. Weiterhin ist $Q_k \cap Q_l$ immer ein Quader oder eine Jordan-Nullmenge (ein „Randstückchen“). Es folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{Q_k} f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \int_{Q_k \cap Q_l} f(x) dx,$$

wobei unsere vorangegangene Betrachtung zeigt, dass die innere Reihe auf der rechten Seite tatsächlich für jedes $k \geq 1$ eine endlich Summe ist. Da diese Reihen nach Voraussetzung absolut konvergieren, können wir die Summationsreihenfolge ändern ohne den Grenzwert zu verändern (*hierfür ist absolute Konvergenz im Allgemeinen unverzichtbar!*). \square

Satz 1.14 — Eigenschaften des uneigentlichen Riemann-Integrals. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, f und g uneigentlich Riemann-integrierbare Funktionen über Ω und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) Die Funktion $\alpha f + \beta g$ und $|f|$ sind uneigentlich Riemann-integrierbar und es ist

$$\int_{\Omega} (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_{\Omega} f dx + \beta \int_{\Omega} g dx;$$

(ii) Ist $f \leq g$ dann gilt $\int_{\Omega} f dx \leq \int_{\Omega} g dx$;

Beweis. Diese Eigenschaften sind eine direkte Folge aus den Rechenregeln für absolut konvergente Reihen (aus der *MfPI* bekannt) und den Eigenschaften des (eigentlichen) Riemann-Integrals (Satz 1.6). \square

Korollar 1.5. Sei $U \subset \Omega$ offen und f über Ω uneigentlich Riemann-integrierbar. Dann ist f auch über U uneigentlich Riemann-integrierbar.

Beweis. Anwenden von Satz 1.14 auf die Funktion $\chi_U \cdot f$. \square

In der Praxis ist es häufig angenehmer mit Ausschöpfungen als mit Zerlegungen einer offenen Menge zu arbeiten. Der nachfolgende Satz zeigt, dass dies möglich ist.

Satz 1.15 — Ausschöpfungssatz. Sei $(\Omega_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Ausschöpfung der offenen Menge Ω durch Jordan-messbare Mengen. Eine Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann uneigentlich Riemann-integrierbar, wenn es ein $M > 0$ gibt, sodass $\int_{\Omega_k} |f(x)| dx < M$ für alle $k \geq 1$ gilt. In diesem Fall ist

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} f(x) dx.$$

Beweis. Die „ \Rightarrow “-Richtung der Äquivalenz folgt direkt aus Korollar 1.5. Wenden wir uns der „ \Leftarrow “-Richtung zu. Um Konvergenzeigenschaften zu untersuchen, ist es leichter mit nicht-negativen Folgen zu arbeiten. Deshalb definieren wir die Funktionen

$$f_+ := \frac{1}{2}(|f| + f) \quad \text{und} \quad f_- := \frac{1}{2}(|f| - f).$$

Beide Funktionen sind nicht-negativ und es gilt $f = f_+ - f_-$. Weiterhin sind die durch $I_k^{\pm} := \int_{\Omega_k} f_{\pm} dx$ definierten Folgen monoton wachsend und durch M beschränkt (*Überlegt euch warum!*). Damit existieren die Grenzwerte $I^{\pm} = \lim_{k \rightarrow \infty} I_k^{\pm}$ und es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega_k} f_+(x) dx - \int_{\Omega_k} f_-(x) dx \right) = I_+ - I_-.$$

Es bleibt zu zeigen, dass f auch uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Sei hierfür $(Q_l)_{l=1}^{\infty}$ eine Zerlegung von Ω . Dann folgt aus den Definitionen 1.9 und 1.10, dass es für jedes $k \geq 1$ natürliche Zahlen $1 \leq L \leq K$ gibt, sodass $\Omega_k \subseteq \bigcup_{l=1}^L Q_l \subseteq \Omega_K$ ist. Damit folgt

$$\int_{\Omega_k} f_{\pm}(x) dx \leq \int_{\bigcup_{l=1}^L Q_l} f_{\pm}(x) dx \leq \int_{\Omega_K} f_{\pm}(x) dx.$$

Dieser „Sandwich“ gilt auch im Grenzwert $k \rightarrow \infty$ und liefert somit das gewünschte Ergebnis. \square

Die folgende direkte Folgerung aus dem Ausschöpfungssatz zeigt, dass der Begriff des uneigentlichen Riemann-Integrals mit unserem bisherigen Integrationsbegriff kompatibel ist.

Korollar 1.6. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, Jordan-messbare Menge und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar (siehe Definition 1.6), wenn f uneigentlich Riemann-integrierbar ist.

Beispiel 1.11. In diesem Beispiel betrachten wir, wie wir mithilfe von Ausschöpfungen tatsächlich uneigentliche Integrale ausrechnen können. Konkret möchten wir den „Normierungsfaktor“ für das *gaußsche Fehlerintegral* ausrechnen, d.h., wir wollen zeigen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$ ist. Zuerst sollten wir uns darüber Gedanken machen, ob dieses uneigentliche Integral überhaupt existiert. Tatsächlich folgt aus einer Betrachtung der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion, dass $e^{-x^2/2} \leq \max\{1, 1/x^2\}$ für alle $x \geq 0$ ist. Somit gilt

$$\frac{1}{2} \int_{-k}^k e^{-x^2/2} dx = \int_0^k e^{-x^2/2} dx \leq 1 + \int_1^k \frac{1}{x^2} dx.$$

für natürliche Zahlen $k \geq 1$. Für die rechte Seite wissen wir (*sonst Übung!*), dass das uneigentliche Integral existiert. Somit existiert auch unser gesuchtes uneigentliches Integral.

Nun können wir uns der eigentlichen Berechnung widmen. Hierfür untersuchen wir das mehrdimensionale uneigentliche Integral $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$ mithilfe der beiden in Beispiel 1.10 vorgestellten Ausschöpfungen des \mathbb{R}^2 . Für das Riemann-Integral über den Quader $[-k, k]^2$ erhalten durch Anwenden des Satzes von Fubini:

$$\begin{aligned} \int_{[-k, -k]^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy &= \int_{-k}^k \left(\int_{-k}^k e^{-(x^2+y^2)/2} dx \right) dy \\ &= \int_{-k}^k e^{-y^2/2} \left(\int_{-k}^k e^{-x^2/2} dx \right) dy \\ &= \left(\int_{-k}^k e^{-x^2/2} dx \right) \left(\int_{-k}^k e^{-y^2/2} dy \right) \\ &= \left(\int_{-k}^k e^{-x^2/2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir zweimal die Linearität des Riemann-Integrals ausgenutzt. Damit folgt aus dem Ausschöpfungssatz (Satz 1.15), dass

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right)^2 \quad (1.10)$$

ist. Benutzen wir nun die Ausschöpfung von \mathbb{R}^2 durch Kreisscheiben, dann bietet es sich an die Rotationssymmetrien der Integrationsgebiete wie auch des Integranden durch die Verwendung von Polarkoordinaten auszunutzen. Das haben wir bereits in Beispiel 1.8 getan. Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{B}_k^2(\mathbf{0})} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \lim_{k \rightarrow \infty} 2\pi(1 - e^{-k}) = 2\pi. \quad (1.11)$$

Gleichsetzen der Gleichungen (1.10) und (1.11) und Umstellen liefert das gesuchte Ergebnis.

~ 2 ~

Vektoranalysis

2.1 Kurven- und Oberflächenintegrale

2.1.1 Kurvenintegrale

Eine (**parametrisierte**) **Kurve** im \mathbb{R}^n ist eine C^1 -Abbildung $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wir nennen γ **regulär**, wenn $\gamma'(t) := \frac{d}{dt}\gamma(t) \neq 0$ für alle $t \in (a, b)$ ist. Reguläre Kurven erlauben es uns an jeden Punkt eine Tangente zu finden — die $\gamma'(t)$ sind die zugehörigen **Tangentialvektoren**. Weiterhin soll γ **geschlossen** heißen, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist, und **einfach**, wenn $\gamma|_{(a,b)}$ injektiv ist.

Vorlesung 9
(12.11.24)

Definition 2.1. Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve und U eine offene Menge. Seien $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $Y: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, sodass $f \circ \gamma$ und $Y \circ \gamma$ Riemann-integrierbar sind. Dann ist **Kurvenintegral erster Art** von f entlang γ definiert durch

$$\int_{\gamma} f \, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Analog definieren wir das **Kurvenintegral zweiter Art** von Y entlang γ durch

$$\int_{\gamma} Y \cdot d\vec{s} := \int_a^b \langle Y(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt.$$

In dieser suggestiven Notation wird $ds = \|\gamma'\| dt$ auch als (*skalares*) **Bogenelement** und $d\vec{s} = \gamma' dt$ als **vektorielles Bogenelement** bezeichnet. **Konturintegral** und **Wegintegral** sind andere geläufige Bezeichnungen für das Kurvenintegral.

Eine (**reguläre**) **Umparametrisierung** einer parametrisierten Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine bijektive C^1 -Abbildung $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ mit $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in (c, d)$. Die umparametrisierte Kurve ist dann $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$. Die Umparametrisierung heißt **orientierungserhaltend**, wenn $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in (c, d)$. Orientierungserhaltende Umparametrisierung definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der parametrisierten Kurven. Der folgende Satz garantiert uns, dass Kurvenintegrale unter dieser Äquivalenzrelation erhalten bleiben, *d.h.*, dass diese Integralbegriffe nicht von der gewählten Parametrisierung der Kurve abhängen.

Satz 2.1 — Parametrisierungsinvarianz (Kurvenintegrale). Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve und $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine orientierungserhaltende Umparametrisierung. Dann gilt für hinreichend reguläre $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $Y: U \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_{\gamma \circ \varphi} f \, ds \quad \text{und} \quad \int_{\gamma} Y \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma \circ \varphi} Y \cdot d\vec{s}.$$

Beweis. Entweder aus der MfP2 bekannt oder Übung. (Tipp: Substitutionsregel) □

Dieses Resultat erlaubt es uns parametrisierten Kurven geometrische Größen (z.B. eine Länge) zuzuordnen.

Definition 2.2. Die **Länge** $L(\gamma)$ einer parametrisierten Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$L(\gamma) := \int_{\gamma} \mathbf{1} \, ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Da wir das Kurvenintegral mithilfe des Riemann-Integrals definieren „erbt“ dieses viele nützliche Eigenschaften.

Satz 2.2 — Linearität von Kurvenintegralen. Seien $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $Y, \tilde{Y}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ hinreichend regulär und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) \, ds = \alpha \int_{\gamma} f \, ds + \beta \int_{\gamma} g \, ds$$

und

$$\int_{\gamma} (\alpha Y + \beta \tilde{Y}) \cdot d\vec{s} = \alpha \int_{\gamma} Y \cdot d\vec{s} + \beta \int_{\gamma} \tilde{Y} \cdot d\vec{s}.$$

Beweis. Übung! □

Definition 2.3. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Abbildung. Dann ist der **Gradient** von f an der Stelle $p \in U$ die eindeutige Abbildung $\text{grad}(f): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\langle \text{grad}_p(f), X \rangle = d_p f(X)$$

für alle $p \in U$ und $X \in \mathbb{R}^n$.

Anmerkung 2.1. Eine andere übliche Schreibweise für den Gradienten ist $\nabla f := \text{grad}(f)$.

Satz 2.3 — Eigenschaften des Gradienten. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Weiterhin seien $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 -Abbildungen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(i) Die Koordinaten-Darstellung des Gradienten ist

$$\text{grad}(f) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f \end{pmatrix}.$$

(ii) Der Gradient ist linear, d.h.,

$$\text{grad}(\alpha f + \beta g) = \alpha \text{grad}(f) + \beta \text{grad}(g).$$

(iii) Der Gradient erfüllt die folgende **Leibnizregel** (auch bekannt als Produktregel):

$$\text{grad}(fg) = f \text{grad}(g) + g \text{grad}(f).$$

Beweis. Diese Eigenschaften folgen direkt aus den Eigenschaften des Differentials $d_p f$ (*Übung: Nachrechnen!*). □

Das Kurvenintegral erlaubt die folgende Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung.

Satz 2.4. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Abbildung und $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ eine reguläre Kurve. Dann gilt

$$\int_{\gamma} \text{grad}(F) \cdot d\vec{s} = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Beweis. Folgt direkt aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung im Eindimensionalen (*Übung: Nachrechnen!*). \square

2.1.2 Reguläre Flächenstücke und Oberflächenintegrale

In diesem Abschnitt werden wir analog zu unserem Vorgehen für Kurven den Integralbegriff für Flächen definieren. Viele dieser Begrifflichkeiten ließen sich auch ganz allgemein im \mathbb{R}^n erklären. Wir werden aber im Folgenden nur den Fall $n = 3$ betrachten und uns deshalb schon jetzt auf diesen Fall einschränken. Es ist wichtig zu bemerken, dass wir \mathbb{R}^2 auf natürliche Art und Weise durch $\{(x, y, 0) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$ in den \mathbb{R}^3 einbetten können. Wir schreiben hierfür $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Dadurch können wir den Fall $n = 2$ als Spezialfall von $n = 3$ auffassen.

Ein **reguläres (parametrisiertes) Flächenstück** (U, ψ) ist eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ zusammen mit einer regulären C^1 -Abbildung $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, das heißt, für alle $p \in U$ hat $d_p\psi$ vollen Rang. Diese Forderung ist dazu äquivalent, dass $\partial_u\psi(p)$ und $\partial_v\psi(p)$ linear unabhängig sind. Diese Vektoren heißen **Tangentenvektoren** an die Fläche im Punkt $\psi(p)$. Das Kreuzprodukt $(\partial_u\psi \times \partial_v\psi)(p)$ ist der **Normalenvektor** im Punkt $\psi(p)$.

Definition 2.4. Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$. Das **Kreuzprodukt** $a \times b \in \mathbb{R}^3$ von a und b ist der eindeutige Vektor, der die Gleichung

$$\langle X, a \times b \rangle = \det(X, a, b) \quad (2.1)$$

für alle $X \in \mathbb{R}^3$ erfüllt.

Satz 2.5 — Eigenschaften des Kreuzproduktes. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$.

(i) Die Koordinaten-Darstellung des Kreuzproduktes ist

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Das Kreuzprodukt ist *anti-symmetrisch*: $a \times b = -b \times a$.

(iii) Das Kreuzprodukt ist *linear*: $a \times (\alpha b + \beta c) = \alpha(a \times b) + \beta(a \times c)$.

(iv) Das Kreuzprodukt ist *zyklisch* im folgenden Sinn:

$$\langle a, b \times c \rangle = \langle b, c \times a \rangle = \langle c, a \times b \rangle.$$

(v) Es gilt $a \times b = 0$ genau dann, wenn a und b linear abhängig sind.

Beweis. Die Eigenschaften (ii), (iii), (iv) und (v) folgen direkt aus den Eigenschaften der Determinante und der definierenden Gleichung (2.1). Die Koordinaten-Darstellung (i) ist eine Konsequenz aus dem Laplace'schen-Entwicklungssatz, denn es gilt

$$\det(X, a, b) = X_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - X_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + X_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \quad (2.2)$$

□

Beispiel 2.1. Wir können die im Ursprung zentrierte *Sphäre* mit Radius $R > 0$

$$\mathbb{S}_R^2(0) := \{\|x\| = R : x \in \mathbb{R}^3\}$$

bis auf einen Halbkreis (*Überlegt euch welchen!*) parametrisieren durch die Abbildung

$$\psi: (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto R \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

(vgl. mit Kugelkoordinaten (1.8)). Mit $U := (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ ist dann (U, ψ) ein reguläres Flächenstück. Die Tangentialvektoren sind gegeben durch

$$\partial_\theta \psi = R \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \partial_\phi \psi = R \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit können wir nachrechnen, dass der Normalenvektor an $\psi(\theta, \phi)$ gegeben ist durch

$$\partial_\theta \psi \times \partial_\phi \psi = R^2 \sin \theta \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = R \sin(\theta) \psi(\theta, \phi).$$

Definition 2.5. Sei (U, ψ) ein reguläres Flächenstück, wobei U Jordan-messbar ist und $\psi(U) \subset V$ mit der offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^3$. Weiterhin seien $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ und $Y: V \rightarrow \mathbb{R}^3$, sodass $f \circ \psi$ und $Y \circ \psi$ Riemann-integrierbar über U sind. Dann ist das **Oberflächenintegral erster Art** von f über (U, ψ) definiert durch

$$\int_{(U, \psi)} f \, d\sigma := \int_U f(\psi(u, v)) \|(\partial_u \psi \times \partial_v \psi)(u, v)\| \, dudv.$$

Analog definieren wir das **Oberflächenintegral zweiter Art** von Y über (U, ψ) durch

$$\int_{(U, \psi)} Y \cdot d\vec{\sigma} := \int_U \langle Y(\psi(u, v)), (\partial_u \psi \times \partial_v \psi)(u, v) \rangle \, dudv.$$

In dieser Notation wird $d\sigma = \|\partial_u \psi \times \partial_v \psi\| \, dudv$ als das (*skalare*) *Oberflächenelement* und $d\vec{\sigma} = \partial_u \psi \times \partial_v \psi \, dudv$ *vektorielle Oberflächenelement* bezeichnet. Eine andere geläufige Bezeichnung für das Oberflächenintegral zweiter Art ist *Flussintegral*. Wie das Kurvenintegral „erbt“ das Oberflächenintegral viele Eigenschaften vom Riemann-Integral.

Satz 2.6 — Linearität von Oberflächenintegralen. Seien $f, g: V \rightarrow \mathbb{R}$ und $Y, \tilde{Y}: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ hinreichend regulär und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_{(U, \psi)} (\alpha f + \beta g) \, d\sigma = \alpha \int_{(U, \psi)} f \, d\sigma + \beta \int_{(U, \psi)} g \, d\sigma$$

und

$$\int_{(U, \psi)} (\alpha Y + \beta \tilde{Y}) \cdot d\vec{\sigma} = \alpha \int_{(U, \psi)} Y \cdot d\vec{\sigma} + \beta \int_{(U, \psi)} \tilde{Y} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Beweis. Übung! □

Eine (**reguläre**) **Umparametrisierung** eines regulären Flächenstücks (U, ψ) ist ein C^1 -Diffeomorphismus $\varphi: W \rightarrow U$, $W \subset \mathbb{R}^2$ offen. Die Umparametrisierung heißt **orientierungserhaltend**, wenn $\det d_p \varphi > 0$ für alle $p \in W$ gilt.

Vorlesung 10
(14.11.24)

Satz 2.7 — Parametrisierungsinvarianz (Oberflächenintegrale). Sei (U, ψ) ein reguläres Flächenstück und $\varphi: W \rightarrow U$ eine orientierungserhaltende Umparametrisierung. Für hinreichend reguläre $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ und $Y: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist

$$\int_{(U, \psi)} f \, d\sigma = \int_{(W, \psi \circ \varphi)} f \, d\sigma \quad \text{und} \quad \int_{(U, \psi)} Y \cdot d\vec{\sigma} = \int_{(W, \psi \circ \varphi)} Y \cdot d\vec{\sigma}.$$

Beweis. Wir werden hier nur das vektorielle Oberflächenintegral diskutieren. Der skalare Fall funktioniert ganz analog. Die Idee für diesen Beweis ist es den Transformationssatz (Satz 1.10) anzuwenden. Unsere Voraussetzungen gewährleisten bereits das $\varphi(W) = U$ ein C^1 -Diffeomorphismus ist, d.h., die linke Seite unserer gewünschten Gleichung sieht wie folgt aus:

$$\int_{(U, \psi)} Y \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\varphi(W)} \langle Y(\psi(u, v)), (\partial_u \psi \times \partial_v \psi)(u, v) \rangle \, dudv.$$

Wir müssen also zeigen, dass der Integrand der rechten Seite die richtige Form für den Transformationssatz hat. Wir beobachten hierfür dass sich die Tangentialvektoren unter der Umparametrisierung $(u, v) = \varphi(\tilde{u}, \tilde{v})$ mit $(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{p} \in W$ durch $d_{\tilde{p}}(\psi \circ \varphi) = d_{\varphi(\tilde{p})}\psi \cdot d_{\tilde{p}}\varphi$ transformiert. Zusammen mit der Identität (2.2) folgt, dass der Integrand der rechten Seite sich auf genau die benötigte Weise transformiert:

$$\langle (Y \circ \psi \circ \varphi), \partial_{\tilde{u}}(\psi \circ \varphi) \times \partial_{\tilde{v}}(\psi \circ \varphi) \rangle = \overbrace{\langle (Y \circ \psi), (\partial_u \psi \times \partial_v \psi) \rangle}_{\text{Integrand der linken Seite}} \cdot \overbrace{d_{\tilde{p}}\varphi}_{\text{Trafo.}} \cdot \overbrace{\det d_{\tilde{p}}\varphi}_{\text{Fkt.-Det.}} \quad (2.3)$$

□

Definition 2.6. Die **Oberfläche** $A(U, \psi)$ eines regulären Flächenstücks (U, ψ) ist definiert durch

$$A(U, \psi) := \int_{(U, \psi)} 1 \, d\sigma = \int_U \|(\partial_u \psi \times \partial_v \psi)(u, v)\| \, dudv.$$

Beispiel 2.2 — Oberfläche der Kugel. Mithilfe der in Beispiel 2.1 betrachteten Parametrisierung (U, ψ) können wir die Oberfläche der Kugel $\mathbb{S}_R^2(0)$ berechnen. Es gilt

$$\int_{(U, \psi)} 1 \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \theta \, d\theta d\phi = 4\pi R^2.$$

Beispiel 2.3 — Fluss des Coulomb-Felds. Gegeben sei eine Punktladung Q im Koordinatensprung. Das zugehörige elektrische Feld an der Stelle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist gegeben durch

$$E(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{\|x\|^3}.$$

Hier ist ϵ_0 die elektrische Feldkonstante. Mithilfe der Parametrisierung (U, ψ) der Sphäre $\mathbb{S}_R^2(0)$ aus Beispiel 2.1 rechnen wir nach, dass der elektrische Fluss durch $\mathbb{S}_R^2(0)$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \int_{(U, \psi)} E \cdot d\vec{\sigma} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\langle \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\psi(\theta, \phi)}{\|\psi(\theta, \phi)\|^3}, R \sin(\theta) \psi(\theta, \phi) \right\rangle d\theta d\phi \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \underbrace{\frac{\langle \psi(\theta, \phi), \psi(\theta, \phi) \rangle}{\|\psi(\theta, \phi)\|^3}}_{=1/R, \text{ weil } \psi(\theta, \phi) \in \mathbb{S}_R^2(0)} R \sin(\theta) d\theta d\phi \\ &= \frac{Q}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Beispiel 2.4 — Guldin'sche Regel für Oberflächen. Die Oberfläche einer Rotationsfläche, die entsteht, wenn man eine ganz auf einer Seite der Rotationsachse gelegene einfache Kurve rotiert, ist gleich dem Produkt aus der Länge der Kurve und der Länge des Weges, den der Schwerpunkt der Kurve zurücklegt.

2.1.3 Berandete Untermannigfaltigkeiten

Einführende Überlegungen. Häufig möchten wir Flächen betrachten, die sich nicht (leicht) durch ein einzelnes reguläres Flächenstück darstellen lassen. Eine Möglichkeit dieses Problem zu lösen ist es reguläre Flächenstücke „geschickt“ entlang ihrer Ränder „zusammenzukleben“. Diese Möglichkeit ist meist für konkrete Berechnungen nützlich und es ist dann auch „intuitiv klar“ was zu tun ist. Weitere mathematische Details für dieses Vorgehen können in [FK11, §26] gefunden werden.

Leider sind Definitionen, die für konkrete Rechnungen an (einfachen) Beispielen gut Resultate liefern, nicht immer auch gut geeignet, um allgemeine Beweise zu führen. Das Hauptproblem an der obigen Herangehensweise ist das „geschickte Verkleben“ der Ränder. So intuitiv dieses Vorgehen für konkrete Beispiele erscheinen mag — z.B. die Sphäre oder den Torus — so kompliziert kann es für allgemeine Flächen werden, die z.B. als Nullstellenmenge eines Polynoms definiert sind. Denn hier ist es *a priori* überhaupt nicht klar wie wir diese in „einfache Stücke zerschneiden“ sollen (noch schlimmer: ob wir das überhaupt können!).

Die Lösung für dieses Problem ist es von der Idee einer „harten“ Zerlegungen von Flächen abzurücken. Stattdessen wollen wir, dass sich eine Umgebung jedes Punkts unserer Fläche durch mindestens ein reguläres Flächenstück darstellen lässt. Diese Flächenstücke dürfen sich aber nun überlappen. Wir haben also keine „harten Kanten“ sondern „weiche Überlappungsbereiche“. Dadurch werden wir in der Lage sein, sehr viel weitreichendere Verallgemeinerungen des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung zu beweisen. In der Praxis wird es dann häufig so sein, dass diese Sätze es euch ermöglichen ein Integral über eine komplizierte Menge (3D-Körper, Fläche) durch ein Integral über eine „einfache“ Fläche oder Kurve zu ersetzen, für die ihr das erste Verfahren wieder anwenden könnt.

Unser weiteres Vorgehen ist nun in zwei Schritte gegliedert. Zuerst betrachten wir welche Mengen im \mathbb{R}^n sich auf die eben beschriebene Weise darstellen lassen. Wichtig wird es hierbei sein sicherzustellen, dass sich wichtige geometrische Begriffe — z.B. Tangenten und Normalen — in den verallgemeinerten Fall übertragen lassen. Der zweite Schritt wird dann darin bestehen, den Integralbegriff zu erweitern. Hierbei wird es wesentlich sein ein Werkzeug zu entwickeln, wie wir lokale Lösungen „weich zusammenkleben“ können.

Schritt 1: Untermannigfaltigkeiten. Die Mengen, die sich auf die oben angedeutete Weise beschreiben lassen werden Untermannigfaltigkeit genannt. In der *MfP2* habt ihr euch bereits Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n angeschaut. Die Intuition sagt, dass eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit, $k \leq n$, lokal wie offene Mengen im \mathbb{R}^k aussieht. Mit dieser Definition können wir aber bisher keine „Rand“ darstellen. Zum Beispiel sind nach der *MfP2*-Definition (bis auf ein kleines technisches Detail) einfache reguläre Kurven $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n . Wechseln wir nun aber vom offenen Intervall (a, b) zum abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ — nehmen wir also die Randpunkte $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ dazu — so ist diese Kurve nach der *MfP2*-Definition *keine* Untermannigfaltigkeit mehr, denn die Randstücke „sehen aus“ wie halboffene Intervalle.

Ränder sind aber wesentlich für Verallgemeinerungen des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung (vgl. Satz 2.4). Somit müssen wir unseren Begriff einer Mannigfaltigkeit zu erweitern. Analog dazu, dass für eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand der \mathbb{R}^k als Modell dient, wird für berandete Mannigfaltigkeiten die abgeschlossene **obere Halbebene** $\overline{\mathbb{H}}^k := \{x_k \geq 0\}$ das Modell sein.

Definition 2.7. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Untermannigfaltigkeit (mit Rand)** des \mathbb{R}^n der **Dimension** $k \leq n$, wenn für alle $p \in M$ eine **lokale Parametrisierung** (U_p, V_p, ψ_p) existiert mit:

- (i) $V_p \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $p \in V_p$,
- (ii) $U_p \subset \mathbb{R}^k$ offen,
- (iii) $\psi_p: U_p \rightarrow V_p$ ist eine reguläre C^1 -Abbildung, sodass $\psi_p(U_p \cap \overline{\mathbb{H}}^k) = M \cap V_p$ ein Homöomorphismus ist (bzgl. der Teilmengentopologie).

Der **Rand** $\partial M \subset M$ einer solchen Untermannigfaltigkeit M ist gegeben durch alle Punkte $p \in M$, sodass $\psi_p^{-1}(p) \in \{x_k = 0\} = \partial \overline{\mathbb{H}}^k$. Folglich ist das **Innere** von M gegeben durch $\text{int } M := M \setminus \partial M$. Wir beobachten, dass eine Untermannigfaltigkeit ohne Rand, also $\partial M = \emptyset$, genau die Definition aus der *MfP2* erfüllt. Weiterhin wollen wir eine Untermannigfaltigkeit M **geschlossen** nennen, wenn M kompakt ist und $\partial M = \emptyset$.

Anmerkung 2.2. An dieser Stelle *muss vorsichtig* mit den Begriffen von Rand und Innerem umgegangen werden, denn im Allgemeinen stimmen die Definitionen für Untermannigfaltigkeiten nicht mit den topologischen Begriffen überein. Diese „Überladung“ der Begrifflichkeiten ist unglücklich, aber absolut geläufig in der Standardliteratur. Welche Definition in einem konkreten Fall gemeint ist ergibt sich allerdings in der Regel eindeutig aus dem Kontext.

Beispiel 2.5.

- Die in $p \in \mathbb{R}^3$ zentrierte **Sphäre** $\mathbb{S}_R^2(p) = \{\|x - p\| = R : x \in \mathbb{R}^3\}$ mit Radius $R > 0$ ist eine geschlossene 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit.
- Der (ebene) **Kreis** $\mathbb{S}_R^1(p) = \mathbb{S}_R^2(p) \cap \{z = 0\}$ mit Zentrum $p \in \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ und Radius $R > 0$ ist eine geschlossene 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit (*d.h.* eine geschlossene

Kurve).

- Die *abgeschlossene Kugel* $\overline{\mathbb{B}_R^3(p)} = \{\|x - p\| \leq R : x \in \mathbb{R}^3\}$ mit Zentrum $p \in \mathbb{R}^3$ und Radius $R > 0$ ist eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand $\partial\overline{\mathbb{B}_R^3(p)} = \mathbb{S}_R^2(p)$. Das Innere $\text{int}\overline{\mathbb{B}_R^3(p)}$ ist durch die *offene Kugel* $\mathbb{B}_R^3(p) = \{\|x - p\| < R : x \in \mathbb{R}^3\}$ gegeben.
- Die *abgeschlossene Kreisscheibe* $\overline{\mathbb{D}_R(p)} = \overline{\mathbb{B}_R^3(p)} \cap \{z = 0\}$ mit Zentrum $p \in \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ und Radius $R > 0$ ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand $\partial\overline{\mathbb{D}_R(p)} = \mathbb{S}_R^1(p)$. Ihr Inneres $\text{int}\overline{\mathbb{D}_R(p)}$ ist durch die *offene Kreisscheibe* $\mathbb{D}_R(p) = \mathbb{B}_R^3(p) \cap \{z = 0\}$ gegeben.

Für parametrisierte Kurven und Flächenstücke haben wir bereits über Tangenten und Normalen gesprochen. Diese Ideen lassen sich für k -dimensionale Untermannigfaltigkeiten verallgemeinern.

Definition 2.8. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Der **Tangentialraum** an den Punkt $p \in M$ mit lokaler Parametrisierung (U, V, ψ) ist definiert durch

$$T_p M := \text{span} \{ \partial_{x_1} \psi, \dots, \partial_{x_k} \psi \}.$$

Den **Normalenraum** an p definieren wir analog durch

$$N_p M := (T_p M)^\perp = \{ X \in \mathbb{R}^n : \langle X, Y \rangle = 0 \text{ für alle } Y \in T_p M \}.$$

Es ergibt sich direkt aus diesen Definitionen, dass $n = \dim(T_p M) + \dim(N_p M)$.

An dieser Stelle sollten wir kurz innehalten und nachprüfen, dass unsere Definitionen tatsächlich Sinn ergeben. Insbesondere haben wir den Rand und den Tangentialraum durch die (willkürliche) Wahl einer lokalen Parametrisierung definiert. Dadurch ergeben sich aber zum Glück keine Probleme. Diese Behauptung ist eine Konsequenz aus den großen Sätzen zur Differentialrechnung aus der *MfP2* (z.B.: Taylor-Entwicklung, Umkehrsatz, ...). Ich werde hier an dieser Stelle nur kurz die wesentlichen Schritte für einen Beweis benennen und einige Hinweise zur Beweisidee geben. Die Details überlasse ich euch als Übung.

Lemma 2.1. Der Tangentialraum $T_p M$ und Normalenraum $N_p M$ an eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ im Punkt $p \in M$ sind wohldefiniert, d.h., sie sind unabhängig von der lokalen Parametrisierung, die für die Definition verwendet wurde.

Beweisidee. Hierbei handelt es sich um eine Folgerung aus dem Taylor'schen Entwicklungssatz. (Übung: Probiert es!) □

Lemma 2.2. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und (U, V, ψ) und $(\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{\psi})$ zwei lokale Parametrisierungen um den Punkt $p \in M$. Dann ist der **Kartenwechsel**

$$\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(V \cap \tilde{V}) \rightarrow \tilde{\psi}^{-1}(V \cap \tilde{V})$$

ein C^1 -Diffeomorphismus, also eine reguläre Umparametrisierung.

Beweisidee. Die Idee ist es zuerst zu zeigen, dass die Existenz der lokalen Parametrisierung (U, V, ψ) impliziert, dass sich $M \cap V$ als Graph einer Funktion schreiben lässt. Diese Behauptung ist im wesentlichen eine Folgerung aus dem Umkehrsatz. Für zwei Flächenstücke, die als Graph dargestellt werden (über der gleichen Hyperebene), ist die Aussage dann leicht zu folgern. □

Lemma 2.3. Der Rand ∂M , das Innere $\text{int } M$ und die Dimension einer Untermannigfaltigkeit mit Rand sind wohldefiniert, *d.h.*, sie hängen nicht von der lokalen Parametrisierung ab, die für ihre Definition verwendet wurde.

Beweisidee. Nach dem vorangegangenen Lemma 2.2 sind Kartenwechsel C^1 -Diffeomorphismen. Die Aussage ist nun eine direkte Konsequenz aus den Eigenschaften von Diffeomorphismen. Insbesondere bilden diese offene Mengen auf offene Mengen ab und ihre Differentiale sind Isomorphismen (also dimensionserhaltend). \square

Eine wichtige Konsequenz aus den obigen Betrachtungen ist der folgende Satz, der auch unsere Intuition für Ränder und Inneres von Mannigfaltigkeiten bestätigt.

Satz 2.8. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist $\text{int } M$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand und ∂M ist eine $(k - 1)$ -dimensionale geschlossene Untermannigfaltigkeit.

Parametrisierte Kurven kommen per Konstruktion mit einem Umlaufsinn — einer sogenannten Orientierung. Der Begriff des Normalenraums erlaubt es uns diesen Begriff auf Flächen zu erweitern. Wir werden uns auf den Fall $n = 3$ beschränken. Ein **Einheitsnormalenfeld** für eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 ist eine Abbildung $N: M \rightarrow \mathbb{R}^3$, sodass $N(p) \in N_p M$ und $\|N(p)\| = 1$ für alle $p \in M$ gilt. Besitzt M ein stetiges Einheitsnormalenfeld, so heißt M **orientierbar** und die Wahl eines solchen Einheitsnormalenfeld heißt **Orientierung** von M .

Beispiel 2.6. Der durch $\psi: \mathbb{R} \times [-1/2, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ v \end{pmatrix},$$

parametrisierte Zylinder ist eine orientierbare 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand. Eine Orientierung ist durch das folgende Einheitsnormalenfeld gegeben:

$$N(u, v) := (\partial_u \psi \times \partial_v \psi)(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2.7. Das **Möbius-Band** wird durch $\psi: \mathbb{R} \times [-1/2, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(u)(1 + v \cos(u/2)) \\ \sin(u)(1 + v \cos(u/2)) \\ v \sin(v/2) \end{pmatrix},$$

parametrisiert. Es ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand, aber es ist *nicht orientierbar*. Das kann eingesehen werden indem wir uns den kanonischen Kandidaten $N(u, v) := (\partial_u \psi \times \partial_v \psi)(u, v)$ für das Einheitsnormalenfeld anschauen. Eine direkte Rechnung zeigt, dass dieses Normalenfeld $N(u + 2\pi, v) = -N(u, v)$ erfüllt und sich somit die Orientierung nach einem Umlauf umkehrt. Tatsächlich ist das Möbius-Band eine Fläche mit nur einer Seite!

Schritt 2: Oberflächenintegrale. Wir haben nun fast alle Komponenten zusammen um Oberflächenintegrale für 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten zu definieren. Die Idee ist es nun zwischen den Oberflächenintegrale verschiedener lokaler Parametrisierungen glatt zu interpolieren. Das folgende Lemma stellt das notwendige Werkzeug bereit.

Lemma 2.4. Sei M eine kompakte Menge im \mathbb{R}^n . Sei $\{U_i\}_{i=1}^s$ eine endliche Überdeckung von M durch offene Mengen. Dann gibt es Funktionen $\varphi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit

- (i) $\varphi_i \in C_c^\infty := \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \text{supp}(f) \text{ kompakt, } f \text{ ist eine } C^\infty\text{-Abbildung}\}$;
- (ii) $\text{supp } \varphi_i \subset U_i$;
- (iii) für alle $p \in M$ ist $\sum_{i=1}^s \varphi_i(p) = 1$.

Die Familie $\{\varphi_i\}_{i=1}^s$ heißt eine der Überdeckung $\{U_i\}_{i=1}^s$ untergeordnete **Zerlegung der Eins**.

Beweis. Solche Funktionen können explizit konstruiert werden. Ich werde das allerdings hier nicht weiter ausführen, sondern verweise bei Interesse auf [BF96, S. 395 ff.] oder [Lee12, S. 40 ff.]. \square

Definition 2.9. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte 2-dimensionale orientierbare Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 . Sei $\{(U_i, V_i, \psi_i)\}_{i=1}^s$ eine endliche Familie von lokalen Parametrisierungen von M , sodass alle U_i Jordan-messbar sind und $M \subset \bigcup_{i=1}^s V_i =: V$. Wir wählen eine zu $\{V_i\}_{i=1}^s$ untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\varphi_i\}_{i=1}^s$. Dann ist für ein Skalarfeld $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ das **Oberflächenintegral erster Art** von f über M definiert durch

$$\int_M f \, d\sigma := \sum_{i=1}^s \int_{(\mathbb{H}^2 \cap U_i, \psi_i)} \varphi_i f \, d\sigma.$$

Analog definieren wir für ein Vektorfeld $Y: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ das **Oberflächenintegral zweiter Art** von Y über M durch

$$\int_M Y \cdot d\vec{\sigma} := \sum_{i=1}^s \int_{(\mathbb{H}^2 \cap U_i, \psi_i)} (\varphi_i Y) \cdot d\vec{\sigma}.$$

Satz 2.9. Jede kompakte 2-dimensionale orientierbare Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^3$ besitzt eine Familie von lokalen Parametrisierungen, die die Anforderungen der vorangegangenen Definition 2.9 erfüllen. Weiterhin hängen die Oberflächenintegrale weder von der Wahl der Parametrisierungen noch von der Wahl der Zerlegung der Eins ab.

Beweis. Die Existenz folgt direkt aus der Kompaktheit von M . Seien nun $\{(U_i, V_i, \psi_i)\}_{i=1}^s$ und $\{(\tilde{U}_i, \tilde{V}_i, \tilde{\psi}_i)\}_{i=1}^{\tilde{s}}$ zwei Familien mit den gesuchten Eigenschaften und $\{\varphi_i\}_{i=1}^s$ bzw. $\{\tilde{\varphi}_j\}_{j=1}^{\tilde{s}}$ entsprechende Zerlegungen der Eins. Dann ist $(\psi_i^{-1}(V_i \cap \tilde{V}_j), V_i \cap \tilde{V}_j, \psi_i)$ ebenfalls eine lokale Parametrisierung von M für alle Paare (i, j) . Da M orientierbar ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass die Kartenwechsel $\tilde{\psi}_j^{-1} \circ \psi_i$ orientierungserhaltend sind. Schließlich lässt sich nachrechnen, dass $\{\varphi_i \tilde{\varphi}_j\}_{i,j}$ eine zu $\{V_i \cap \tilde{V}_j\}_{i,j}$ untergeordnete Zerlegung der Eins ist. (Die vorangegangene Annahme der Orientierbarkeit ist wesentlich für die folgende Rechnung! Übung: 1. Überlegt euch wie sie aus Gleichung (2.3) folgt; 2. Überlegt euch, z.B. am Beispiel des Möbius-Bandes, an welcher Stelle die folgende Rechnung ohne sie problematisch wird.)

Aus diesen Beobachtungen folgt nun

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^s \int_{(\mathbb{H}^2 \cap U_i, \psi_i)} \varphi_i f \, d\sigma &= \sum_{i=1}^s \int_{(\mathbb{H}^2 \cap U_i, \psi_i)} \overbrace{\left(\sum_{j=1}^{\tilde{s}} \tilde{\varphi}_j \right)}{=1} \varphi_i f \, d\sigma \\
 &= \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{\tilde{s}} \int_{(\mathbb{H}^2 \cap U_i, \psi_i)} \tilde{\varphi}_j \varphi_i f \, d\sigma \\
 &= \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{\tilde{s}} \int_{(\mathbb{H}^2 \cap \psi_i^{-1}(V_i \cap \tilde{V}_j), \psi_i)} \tilde{\varphi}_j \varphi_i f \, d\sigma
 \end{aligned}$$

Hier haben wir für den letzten Schritt verwendet, dass $\text{supp}(\tilde{\varphi}_j \varphi_i) \subset V_i \cap \tilde{V}_j$ ist. Nutzen wir nun die Parametrisierungsinvarianz (Satz 2.7), so folgt

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{\tilde{s}} \int_{(\mathbb{H}^2 \cap \psi_i^{-1}(V_i \cap \tilde{V}_j), \psi_i)} \tilde{\varphi}_j \varphi_i f \, d\sigma &= \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{\tilde{s}} \int_{(\mathbb{H}^2 \cap \tilde{\psi}_j^{-1}(V_i \cap \tilde{V}_j), \tilde{\psi}_j)} \tilde{\varphi}_j \varphi_i f \, d\sigma \\
 &= \sum_{j=1}^{\tilde{s}} \sum_{i=1}^s \int_{(\mathbb{H}^2 \cap \tilde{U}_j, \tilde{\psi}_j)} \tilde{\varphi}_j \varphi_i f \, d\sigma \\
 &= \sum_{j=1}^{\tilde{s}} \int_{(\mathbb{H}^2 \cap \tilde{U}_j, \tilde{\psi}_j)} \tilde{\varphi}_j \underbrace{\left(\sum_{i=1}^s \varphi_i \right)}_{=1} f \, d\sigma \\
 &= \sum_{j=1}^{\tilde{s}} \int_{(\mathbb{H}^2 \cap \tilde{U}_j, \tilde{\psi}_j)} \varphi_j f \, d\sigma,
 \end{aligned}$$

wobei wir bei der zweiten Gleichheit wieder $\text{supp}(\tilde{\varphi}_j \varphi_i) \subset V_i \cap \tilde{V}_j$ ausgenutzt haben. Das zeigt die Behauptung für Skalarfelder. Der Beweis für Vektorfelder verläuft genauso. \square

2.2 Der Rotationsatz von Stokes

Mit dem Rotationsatz von Stokes werden wir unsere erste Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung auf mehrdimensionale Integrationsbereiche bekommen — in diesem Fall ist der Integrationsbereich 2-dimensional, also eine Fläche, und der Rand ist 1-dimensional, also eine Kurve. Heuristisch gesprochen besagt der Satz von Stokes, dass

Gegeben eine infinitesimale Deformation einer Fläche. Die hierdurch induzierte totale infinitesimale Rotation der Fläche ist gleich der totalen infinitesimalen Rotation ihrer Randkurve(n).

Mathematisch wird eine „infinitesimale Deformation“ durch ein Vektorfeld $Y: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ modelliert werden. Das „total“ bedeutet hier „Summe aller infinitesimalen Teile“ — mathematisch sauber formulieren wir das durch ein Integral. Herauszufinden, was die „induzierte infinitesimale Rotation“ ist, wird unsere erste Aufgabe sein (Abschnitt 2.2.1). Schließlich wissen wir bereits, dass das Kurvenintegral $\int_{\gamma} Y \cdot d\vec{s}$ die „totale infinitesimale Rotation“ einer Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ durch

Y beschreibt. Dieses Kurvenintegral mit einem Oberflächenintegral in Verbindung zu setzen wird uns zum Satz von Stokes führen (Abschnitt 2.2.2).

2.2.1 Die Rotation eines Vektorfeldes

Wir wollen uns der Definition der Rotation schrittweise nähern. Beginnen wir mit einem elementaren Beispiel: Die stetige Rotation um den Ursprung im \mathbb{R}^2 mit Rotationsgeschwindigkeit $\omega \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$R: t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \in \text{SO}(2).$$

Hierbei erinnern wir uns daran, dass

$$\text{SO}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(A) = 1 \text{ und } A^T A = I_n\}$$

die **spezielle orthogonale Gruppe** ist — die „Rotationsgruppe“ des \mathbb{R}^n . Die Bahnkurve eines Teilchens $p_0 \in \mathbb{R}^2$ unter dieser Rotation lässt sich dann durch $p: t \mapsto R(t)p_0$ beschreiben. Die „infinitesimale Rotation“ von R zum Zeitpunkt $t = 0$ ist am Punkt p_0 nun gegeben durch das Vektorfeld

$$Y(p_0) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p(t) = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R(t) \right) p_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} p_0.$$

Dabei ist es kein Zufall, dass die Ableitung von R zum Zeitpunkt $t = 0$ eine schiefsymmetrische Matrix ist. Für eine allgemeine C^1 -reguläre Rotation $R: t \rightarrow \text{SO}(n)$ mit $R(0) = I_n$ rechnen wir nach, dass

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \underbrace{R^T(t)R(t)}_{=I_n} = \underbrace{(R'(0))^T R(0)}_{=I_n} + \underbrace{R^T(0)R'(0)}_{=I_n} = (R'(0))^T + R'(0).$$

Somit sehen wir, dass der Raum der „infinitesimalen Rotationen“ durch den Vektorraum der **schiefsymmetrischen Matrizen**

$$\mathfrak{so}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A = -A^T\}$$

gegeben ist. Falls $n = 3$ ist gibt es noch eine andere Möglichkeit eine infinitesimale Rotation darzustellen. Sei $\omega \in \mathbb{R}^3$. Dann ist

$$\mathbb{R}^3 \ni p \mapsto \omega \times p = \begin{pmatrix} \omega_2 p_3 - \omega_3 p_2 \\ \omega_3 p_1 - \omega_1 p_3 \\ \omega_1 p_2 - \omega_2 p_1 \end{pmatrix}$$

eine lineare Abbildung. Weiterhin ist leicht abzulesen, dass die Darstellungsmatrix dieser linearen Abbildung — also die Matrix $X_\omega \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ für die $\omega \times p = X_\omega p$ für alle $p \in \mathbb{R}^3$ gilt — durch

$$X_\omega := \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

gegeben ist. Diese Überlegungen sind im folgenden Lemma zusammengefasst.

Lemma 2.5. Der Raum $\{(p \mapsto \omega \times p) : \omega \in \mathbb{R}^3\}$ ist ein Untervektorraum des Raums der linearen Abbildungen $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ der isomorph zu $\mathfrak{so}(3)$ ist, wobei der Isomorphismus durch (2.4) gegeben ist.

Beispiel 2.8. Diese Identifikation erlaubt es uns nun auch das Anfangswertproblem für die Bahnkurve eines Teilchens in einem Rotationsfeld in einer Form zu schreiben, die in der Standardliteratur wohl etwas geläufiger ist:

$$\begin{cases} p'(t) &= (\omega \times p)(t) \\ p(0) &= p_0 \end{cases}$$

Hierbei ist $\{\lambda\omega(t) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ die *Rotationsachse* im \mathbb{R}^3 und $\|\omega(t)\|$ ist die *Drehgeschwindigkeit*.

Was machen wir nun, wenn das Vektorfeld $Y: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ keine konstante Abbildung mehr ist. Ist Y differenzierbar, so garantiert uns der Satz von Taylor, dass wir Y lokal um einen Punkt $p \in U$ gut durch das Differential $d_p Y$ approximieren können. Allerdings muss auch $d_p Y$ keine infinitesimale Rotation sein, d.h., die Jacobi-Matrix $J_Y(p)$ von Y in p ist im Allgemeinen keine schiefsymmetrische Matrix. Hier kommt uns die folgende Beobachtung zu Hilfe: Wir können jede Matrix, also ins Besondere auch die Jacobi-Matrix, durch

$$J_Y(p) = \underbrace{\frac{1}{2} (J_Y(p) + J_Y^T(p))}_{\text{symmetrisch}} + \underbrace{\frac{1}{2} (J_Y(p) - J_Y^T(p))}_{\text{schiefsymmetrisch}}$$

in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Teil zerlegen. Damit kommen wir also zu der folgenden Definition.

Definition 2.10. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $Y: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld. Die *Matrixwertige Rotation* $\text{Rot}(Y): U \rightarrow \mathfrak{so}(n)$ von Y ist definiert durch

$$U \ni p \mapsto \text{Rot}_p(Y) := J_Y(p) - J_Y^T(p).$$

Für $n = 3$ können wir auch eine *vektorwertige Rotation* $\text{rot}(Y): U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definieren. Sie ist gegeben durch

$$U \ni p \mapsto \text{rot}_p(Y) := \begin{pmatrix} \partial_{x_2} Y_3 - \partial_{x_3} Y_2 \\ \partial_{x_3} Y_1 - \partial_{x_1} Y_3 \\ \partial_{x_1} Y_2 - \partial_{x_2} Y_1 \end{pmatrix}.$$

Die vektorwertige Rotation wird auch suggestive als „ $\text{rot}(Y) = \nabla \times Y$ “ geschrieben. Eine andere geläufige Schreibweise, die sich aus dem englischen Wort für *Wirbel* motiviert, ist $\text{curl}(Y)$. Weiterhin zeigt uns der in Lemma 2.5 thematisierte Zusammenhang zwischen dem Kreuzprodukt und $\mathfrak{so}(3)$, dass für $n = 3$ der folgende Zusammenhang zwischen der Matrix- und vektorwertigen Rotation besteht:

$$\text{rot}(Y) \times X = \text{Rot}(Y)X \tag{2.5}$$

für alle $X \in \mathbb{R}^3$. Weiterhin „erbt“ die Rotation gute Eigenschaften vom Differential.

Lemma 2.6. Die Operatoren Rot und rot sind linear, d.h., sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $Y, \tilde{Y}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -Vektorfelder sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\text{Rot}(\alpha Y + \beta \tilde{Y}) = \alpha \text{Rot}(Y) + \beta \text{Rot}(\tilde{Y}).$$

Ist zudem $n = 3$, dann gilt auch

$$\text{rot}(\alpha Y + \beta \tilde{Y}) = \alpha \text{rot}(Y) + \beta \text{rot}(\tilde{Y}).$$

Beweis. Folgt direkt aus der Definition. (Übung!) □

2.2.2 Lokale und Globale Version des Satzes

Wir werden nun den Satz von Stokes in unterschiedlichen Fällen betrachten. Der folgende Satz ist die erste Version. Sie trägt allerdings noch nicht den Namen „Satz von Stokes“ da die zugelassenen „Parametrisierungen“ weitaus weniger Regularität verlangen, als es Flächenstücke erfordern. Darin liegt allerdings auch die Stärke dieser Version.

Vorlesung 12
(21.11.24)

Satz 2.10. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $Q := [a, b] \times [c, d] \subset U$. Weiterhin sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^2 -Abbildung mit $\psi(U) \subset V$. Wir definieren die Kurven $\gamma_1, \gamma_3: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2, \gamma_4: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\begin{aligned} \gamma_1(u) &:= \psi(u, c), \\ \gamma_2(v) &:= \psi(b, v), \\ \gamma_3(u) &:= \psi(a + b - u, d), \\ \gamma_4(v) &:= \psi(a, c + d - v). \end{aligned}$$

Dann gilt für alle C^1 -Vektorfelder $Y: V \rightarrow \mathbb{R}^n$, dass

$$\int_Q \langle \text{Rot}_{\psi(u,v)}(Y) \partial_u \psi(u, v), \partial_v \psi(u, v) \rangle \, dudv = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} Y \cdot d\vec{s}.$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den Integranden auf der rechten Seite. Setzen wir die Definition der Rotation und einer Partiellen Ableitung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle \text{Rot}(Y) \partial_u \psi, \partial_v \psi \rangle &= \langle J_Y \partial_u \psi, \partial_v \psi \rangle - \langle J_Y^T \partial_u \psi, \partial_v \psi \rangle \\ &= \langle \partial_u(Y \circ \psi), \partial_v \psi \rangle - \langle \partial_u \psi, \partial_v(Y \circ \psi) \rangle. \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt erfüllt die Produktregel „ $\partial_x \langle a, b \rangle = \langle \partial_x a, b \rangle + \langle a, \partial_x b \rangle$ “. Damit können wir obige Gleichung weiter umformen und erhalten

$$\begin{aligned} \langle \text{Rot}(Y) \partial_u \psi, \partial_v \psi \rangle &= \partial_u \langle Y \circ \psi, \partial_v \psi \rangle - \langle Y \circ \psi, \partial_u \partial_v \psi \rangle - \partial_v \langle Y \circ \psi, \partial_u \psi \rangle + \langle Y \circ \psi, \partial_v \partial_u \psi \rangle \\ &= \partial_u \langle Y \circ \psi, \partial_v \psi \rangle - \partial_v \langle Y \circ \psi, \partial_u \psi \rangle. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichheit folgt hier, da nach dem Satz von Schwarz $\partial_u \partial_v \psi = \partial_v \partial_u \psi$ ist. (An dieser Stelle benutzen wir, dass ψ eine C^2 -Abbildung ist.) Setzen wir nun diesen umgeformten Integranden

in das Integral ein und wenden den Satz von Fubini an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \int_Q \langle \text{Rot}(Y) \partial_u \psi, \partial_v \psi \rangle \, dudv &= \int_Q (\partial_u \langle Y \circ \psi, \partial_v \psi \rangle - \partial_v \langle Y \circ \psi, \partial_u \psi \rangle) \, dudv \\
 &= \int_c^d \left(\int_a^b \partial_u \langle Y \circ \psi, \partial_v \psi \rangle \, du \right) dv \\
 &\quad - \int_a^b \left(\int_c^d \partial_v \langle Y \circ \psi, \partial_u \psi \rangle \, dv \right) du \\
 &= \int_c^d (\langle Y(\psi(b, v)), \partial_v \psi(b, v) \rangle - \langle Y(\psi(a, v)), \partial_v \psi(a, v) \rangle) dv \\
 &\quad - \int_a^b (\langle Y(\psi(u, d)), \partial_u \psi(u, d) \rangle - \langle Y(\psi(u, c)), \partial_u \psi(u, c) \rangle) du \\
 &= \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} Y \cdot d\vec{s}.
 \end{aligned}$$

Hier haben wir für die dritte Gleichheit den eindimensionalen Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung verwendet. Die vierte Gleichheit folgt mittels Vergleich mit der Definition des Kurvenintegrals. \square

Wir fangen nun an die Voraussetzungen an die Parametrisierung zu verschärfen. Zusätzlich beschränken wir uns auf den Fall $n = 3$. Dadurch erhalten wir eine erste lokale Version des Rotationssatzes für Flächenstücke.

Satz 2.11 — Der Rotationssatz von Stokes (für reguläre Rechtecke). Sei (U, ψ) ein reguläres C^2 -Flächenstück im \mathbb{R}^3 . Weiterhin sei $Q := [a, b] \times [c, d] \subset U$ und $V \subset \mathbb{R}^3$ offen mit $\psi(U) \subset V$. Schließlich seien die Kurven γ_i definiert wie in Satz 2.10. Dann gilt für alle C^1 -Vektorfelder $Y: V \rightarrow \mathbb{R}^3$, dass

$$\int_{(\text{int } Q, \psi)} \text{rot}(Y) \cdot d\vec{\sigma} = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} Y \cdot d\vec{s}.$$

Beweis. Wir müssen nur argumentieren, wie wir im Integranden auf der rechten Seite von $\text{Rot}(Y)$ zu $\text{rot}(Y)$ wechseln können. Der Rest folgt aus dem vorangegangenen Satz 2.10. Tatsächlich folgt aus den Eigenschaften des Kreuzproduktes und der Gleichung (2.5), dass

$$\langle \text{rot}(Y), \partial_u \psi \times \partial_v \psi \rangle = \langle \text{rot}(Y) \times \partial_u \psi, \partial_v \psi \rangle = \langle \text{Rot}(Y) \partial_u \psi, \partial_v \psi \rangle. \quad \square$$

Wir können nun diese lokale Version „geschickt zusammenkleben“ und so eine globale Version auf Mannigfaltigkeiten bekommen.

Satz 2.12 — Der Rotationssatz von Stokes (für Mannigfaltigkeiten mit Rand). Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ offen und $M \subset V$ eine orientierbare kompakte 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand. Dann gilt für jedes C^1 -Vektorfeld $Y: V \rightarrow \mathbb{R}^3$, dass

$$\int_M \text{rot}(Y) \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\partial M} Y \cdot d\vec{s}.$$

Anmerkung 2.3. Die rechte Seite dieser Gleichung ist einen Kommentar wert.

- Zum Einen kann der Rand einer 2-dimensionalen Untermannigfaltigkeit aus mehreren getrennten Kurven bestehen. Dann ist die rechte Seite als Summe über die einzelnen Kurvenintegrale zu verstehen.
- Zum Anderen müssen wir die Orientierung der Kurve (ihren Umlaufsinn) passend zur Orientierung der Untermannigfaltigkeit wählen:

*Die Randkurve soll immer so durchlaufen werden,
dass der Normalenvektor nach oben zeigt und die Fläche zur Linken liegt.*

Es ist gut sich zu überlegen wie diese Forderung mit den lokalen Parametrisierungen von M und der Orientierung, also der Wahl des Einheitsnormalenfelds $N: p \mapsto N(p) \in N_p M$ zusammenhängt. Betrachten wir hierfür $p \in \partial M$ und eine lokale Parametrisierung (U, V, ψ) mit $p \in M \cap V$. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass der durch ψ induzierte Normalenvektor in p in die gleiche Richtung zeigt wie $N(p)$, d.h., dass $(\partial_u \psi \times \partial_v \psi)(p) = \lambda N(p)$ für ein $\lambda > 0$, und weiterhin, dass U eine in $\psi^{-1}(p)$ zentrierte Kugel ist (*Übung: Überlegt euch warum!*). Dann ist die gewünschte (lokale) Parametrisierung des Randstücks $\partial M \cap V$ gegeben durch $\gamma: u \mapsto \psi(u, 0)$, wobei $(u, 0) \in U$.

Beweisskizze von Satz 2.12.

- Jeder Punkt $p \in M$ besitzt eine offene Umgebung $V_p \subset \mathbb{R}^3$, sodass $M \cap V_p$ durch ein Rechteck parametrisiert werden kann, d.h., es existiert eine lokale Parametrisierung (U_p, V_p, ψ_p) mit $U_p := (a_p, b_p) \times (c_p, d_p)$.
- Da M kompakt ist reichen endlich viele dieser lokalen Parametrisierungen $\{(U_i, V_i, \psi_i)\}_{i=1}^s$ aus, um ganz M zu parametrisieren, d.h., es gilt $M \subset \bigcup_{i=1}^s V_i$. Weiterhin kann nachgewiesen werden (*Übung!*), dass es $\epsilon_i > 0$ existieren, sodass sogar $M \subset \bigcup_{i=1}^s \psi_i(Q_i)$, wobei

$$Q_i := [a_i + \epsilon_i, b_i - \epsilon_i] \times [c_i + \epsilon_i, d_i - \epsilon_i] \subset \overline{\mathbb{H}^2}.$$

- Lemma 2.4 garantiert uns, dass eine zu $\{V_i\}_{i=1}^s$ untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\varphi_i\}_{i=1}^s$ existiert. Es ist möglich diese Zerlegung so zu wählen (*Übung!*), dass

$$\text{supp}(\varphi_i) \cap M \subset \psi_i(\text{int}(Q_i)).$$

- Wir definieren $Y_i := \varphi_i Y$. Da alle φ_i C^∞ -Abbildungen sind „erbt“ Y_i die Regularität von Y . Somit folgt aus der Linearität der Rotation, dass

$$\text{rot}(Y) = \text{rot}(Y_1) + \dots + \text{rot}(Y_s).$$

Weiterhin folgt aus $\text{supp}(\varphi_i) \cap M \subset \psi_i(\text{int}(Q_i))$, dass $\text{supp}(Y_i) \cap M \subset \psi_i(\text{int}(Q_i))$.

- Aus der Linearität des Oberflächenintegrals folgt nun, dass wir jedes $\text{rot}(Y_i)$ einzeln diskutieren können. Weiterhin zeigt uns die Parametrisierungsinvarianz des Oberflächenintegrals (Satz 2.9), dass

$$\int_M \text{rot}(Y_i) \cdot d\vec{\sigma} = \int_{(U_i, \psi_i)} \text{rot}(Y_i) \cdot d\vec{\sigma} = \int_{(\text{int}(Q_i), \psi_i)} \text{rot}(Y_i) \cdot d\vec{\sigma},$$

wobei die letzte Gleichheit aus $\text{supp}(Y_i) \cap M \subset \psi_i(\text{int}(Q_i))$ folgt.

■ Nun gibt es zwei Fälle:

- (i) $\psi_i|_{Q_i}$ parametrisiert ein inneres Flächenstück, d.h., $Q_i \cap \overline{\mathbb{H}^2} = \emptyset$. Dann folgt aus dem Satz von Stokes für reguläre Rechtecke (Satz 2.11), dass

$$\int_{(\text{int } Q_i, \psi_i)} \text{rot}(Y_i) \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\partial Q_i} (Y_i \circ \psi_i) \cdot d\vec{s} = 0,$$

wobei die letzte Gleichheit aus $(Y_i \circ \psi_i)|_{\partial Q_i} = 0$ folgt.

- (ii) $\psi_i|_{Q_i}$ parametrisiert ein Flächenstück am Rand, d.h., $Q_i \cap \overline{\mathbb{H}^2} \neq \emptyset$. Dieses mal folgt aus Satz 2.11, dass

$$\int_{(\text{int } Q_i, \psi_i)} \text{rot}(Y_i) \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\partial Q_i} (Y_i \circ \psi_i) \cdot d\vec{s} = \int_{\partial M \cap \psi_i(Q_i)} Y_i \cdot d\vec{s},$$

da $(Y_i \circ \psi_i)|_{\partial Q_i}(p) \neq 0$ nur für $p \in \partial Q \cap \overline{\mathbb{H}^2}$ möglich ist. □

Eine unmittelbare und wichtige Folgerung aus dem Satz von Stokes ist die folgende Aussage.

Satz 2.13. Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ offen und $M \subset V$ eine orientierbare geschlossene 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann gilt für jedes C^1 -Vektorfeld $Y: V \rightarrow \mathbb{R}^3$, dass

$$\int_M \text{rot}(Y) \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

Beispiel 2.9 — Ampère'sches Gesetz. Das Ampère'sche Gesetz stellt einen Zusammenhang zwischen dem elektrischen Strom und dem induzierten magnetischen Feld. In der *integralen Form* lässt sich dieses Gesetz mathematisch durch

$$\int_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I = \mu_0 \int_F \vec{j} \cdot d\vec{\sigma}.$$

modellieren. Hier ist F eine Fläche (2-dimensionale Untermannigfaltigkeit) mit Rand ∂F — z.B. der Querschnitt eines Leiters — \vec{B} die *magnetische Flussdicht*, \vec{j} die *Stromdichte*, I die *Stromstärke* und μ_0 die *magnetische Feldkonstante*. Wenden wir auf die linke Seite den Satz von Stokes an so erhalten wir

$$0 = \int_F (\mu_0 \vec{j} - \text{rot } \vec{B}) \cdot d\vec{\sigma}$$

Wenn wir hinreichende Regularität der Vektorfelder fordern (z.B. stetig differenzierbar), dann folgt hieraus mithilfe der Monotonie des Riemann-Integrals (Satz 1.6) die *differenzielle Form*

$$\mu_0 \vec{j} = \text{rot } \vec{B}$$

des Ampère'schen Gesetzes.

Beispiel 2.10 — Satz von Green. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge die wir durch den Abschluss einer offenen Menge erhalten. Wir nehmen weiterhin an, dass ihr Rand ∂G durch eine geschlossene reguläre C^1 -Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ parametrisiert werden kann. Somit ist G eine kompakte 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand. Interpretieren wir \mathbb{R}^2 als Unterraum von \mathbb{R}^3 , dann ist ein stetiges Einheitsnormalenfeld für G gegeben durch die konstante Abbildung $N: (x, y) \mapsto e_3$ auf den dritten Einheitsvektor. Die zugehörige Orientierung von ∂G

entspricht dem γ , dass ∂G gegen den Uhrzeigersinn durchläuft (*Übung: Nachrechnen!*).

Sei nun $Y(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$ ein C^1 -Vektorfeld in einer offenen Umgebung von G . Wir können nachrechnen, dass

$$\operatorname{rot} Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x q - \partial_y p \end{pmatrix}.$$

Aus dem Satz von Stokes folgt dann, dass

$$\int_G (\partial_x q - \partial_y p) \, dx dy = \int_{\partial G} Y \cdot d\vec{s} = \int_a^b (p \circ \gamma)(t) \partial_t \gamma_1(t) \, dt + \int_a^b (q \circ \gamma)(t) \partial_t \gamma_2(t) \, dt.$$

Diese Identität wird häufig auch suggestiv wie folgt geschrieben:

$$\int_G (\partial_x q - \partial_y p) \, dx dy = \int_{\partial G} p \, dx + \int_{\partial G} q \, dy.$$

Beispiel 2.11. Wir können den Satz von Green benutzen, um eine Formel für den Flächeninhalt einer Menge mittels des Kurvenintegrals zu erhalten. Seien G und γ wie im vorangegangenen Beispiel 2.10. Wir betrachten die Vektorfelder

$$Y: (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{Y}: (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\langle \operatorname{rot} Y, e_3 \rangle = 1 = \langle \operatorname{rot} \tilde{Y}, e_3 \rangle$. Somit gibt uns der Satz von Green, dass

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}_2(G) &= \int_G 1 \, dx dy = \int_a^b \gamma_1(t) \partial_t \gamma_2(t) \, dt \\ &= - \int_a^b \gamma_2(t) \partial_t \gamma_1(t) \, dt \\ &= \int_a^b (\gamma_1(t) \partial_t \gamma_2(t) - \gamma_2(t) \partial_t \gamma_1(t)) \, dt. \end{aligned}$$

2.3 Der Divergenzsatz von Gauß

Der Divergenzsatz von Gauß wird die zweite Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung sein, die wir besprechen werden. Dieses Mal wird der Integrationsbereich 3-dimensional sein, also ein Volumen, und entsprechend der Rand 2-dimensional, also eine Fläche. Der Satz von Gauß sagt dann heuristisch gesprochen aus, dass

Gegeben eine infinitesimale Strömung. Die totale Quelldichte (oder gesamte Quelle) dieser Strömung in einem dreidimensionalen Bereich ist gleich der Fluss-Bilanz durch die Oberfläche dieses Bereiches.

Die „infinitesimale Strömung“ wird durch ein Vektorfeld $Y: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ modelliert werden. Die „Quelldichte“ dieses Vektorfelds ist durch seine Divergenz $\operatorname{div}(Y)$ gegeben. Einen Zusammenhang zwischen dem Integral über die Divergenz in einem Bereich M und dem Oberflächenintegral $\int_{\partial M} Y \cdot d\vec{\sigma}$ zu finden, der „Fluss-Bilanz“, ist die Aufgabe in Abschnitt 2.3.2. Die Beobachtungen aus dem folgenden Abschnitt 2.3.1 werden unser Vorgehen motivieren.

2.3.1 Der zweidimensionale Fall

Sei $J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ der *Drehoperator* in \mathbb{R}^2 . Er beschreibt die 90° -Drehung gegen den Uhrzeigersinn, d.h., es gilt $\langle JX, X \rangle = 0$ und $\det(X, JX) = 1$ für alle $X \in \mathbb{R}^2$ mit $\|X\| = 1$. Es besteht der folgende Zusammenhang zwischen dem Drehoperator und der Rotation.

Lemma 2.7. Sei $Y: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein C^1 -Vektorfeld. Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(Y) &= \langle \operatorname{rot}(JY), e_3 \rangle, \\ \operatorname{div}(JY) &= -\langle \operatorname{rot}(Y), e_3 \rangle. \end{aligned}$$

wobei $\operatorname{div}(Y) := \partial_x Y_1 + \partial_y Y_2$ die *Divergenz* von Y ist.

Beweis. Folgt aus direktem Einsetzen und Nachrechnen. \square

Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte C^2 -Untermannigfaltigkeit mit Rand ∂M . Betrachten wir $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, so ist eine kanonische Orientierung von M gegeben durch das konstante Normalenfeld $M \ni p \mapsto e_3$. Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \partial M$ eine (lokale) reguläre Parametrisierung des Randes von M . Dann ist der normalisierte Tangentialvektor gegeben durch $T := \gamma' / \|\gamma'\|$ wobei $\frac{d}{dt} \gamma = \gamma'$. Die Orientierung von γ ist kompatibel mit der Orientierung von M genau dann, wenn $\det(T, JT, e_3) = 1$ ist. In diesem Fall „weist“ JT in die Fläche M hinein. Das motiviert $N := -JT$ das *äußere Einheitsnormalenfeld* von M zu nennen.

Satz 2.14 — 2-dimensionaler Divergenzsatz. Sei $M \subset V \subset \mathbb{R}^2$ wobei M eine kompakte C^2 -Untermannigfaltigkeit ist und V eine offene Menge ist. Sei weiterhin $N: \partial M \rightarrow \mathbb{R}^2$ das äußere Normalenfeld von M . Für jedes C^1 -Vektorfeld $Y: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ gilt

$$\int_M \operatorname{div}(Y) \, dx dy = \int_{\partial M} \langle Y, N \rangle \, ds,$$

Beweis. Dieser Satz folgt direkt aus dem Satz von Stokes (Satz 2.12). Wir rechnen nach

$$\int_M \operatorname{div}(Y) \, dx dy = \int_M \operatorname{rot}(JY) \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\partial M} (JY) \cdot d\vec{s} = \int_{\partial M} \langle JY, T \rangle \, ds = \int_{\partial M} \langle Y, N \rangle \, ds,$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Schiefsymmetrie von J , also $\langle JY, T \rangle = -\langle Y, JT \rangle$, folgt. \square

2.3.2 Lokale und globale Version des Satzes

Motiviert durch diese Beobachtungen im Zweidimensionalen führen wir die folgende Definition ein.

Definition 2.11. Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $Y: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld. Dann ist die *Divergenz* $\operatorname{div}(Y): V \rightarrow \mathbb{R}$ von Y in $p \in V$ definiert durch

$$\operatorname{div}_p(Y) := \operatorname{tr}(J_Y(p)) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} Y_i(p).$$

Die suggestive Notation „ $\operatorname{div}(Y) = \nabla \cdot Y$ “ kann eine gute Merkhilfe bieten.

Für $n = 3$ besitzt die Divergenz den folgenden Zusammenhang zur Determinante

Lemma 2.8. Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $Y: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein C^1 -Vektorfeld. Dann gilt

$$\operatorname{div}(Y) \det(a, b, c) = \langle dY(a), b \times c \rangle + \langle dY(b), c \times a \rangle + \langle dY(c), a \times b \rangle$$

für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

Beweis. Die rechte Seite der Gleichung bestimmt eine alternierende Trilinearform ω . Da der Raum der alternierenden Trilinearformen über \mathbb{R}^3 ein reeller eindimensionaler Vektorraum ist, gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $\omega(a, b, c) = \lambda \det(a, b, c)$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gilt. Wir müssen also nur noch den Faktor λ bestimmen. Dafür reicht es ω und \det mit einer Basis des \mathbb{R}^3 auszuwerten — insbesondere der Einheitsbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$. Wir rechnen nach (*Übung!*), dass $\det(e_1, e_2, e_3) = 1$ und $\omega(e_1, e_2, e_3) = \operatorname{div}(Y)$. \square

Mit dieser Vorbereitung können wir nun den Divergenzsatz im Dreidimensionalen beweisen. Wir beginnen wieder mit einer lokalen Version. Es ist sehr instruktiv diesen Satz und seinen Beweis mit dem analogen Satz von Stokes (Satz 2.10) zu vergleichen.

Vorlesung 14
(28.11.24)

Satz 2.15 — Divergenzsatz von Gauß (für Quader). Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $Q := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset U$. Weiterhin sei $V \subset \mathbb{R}^3$ offen und $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine C^2 -Abbildung mit $\psi(U) \subset V$. Wir definieren die „Seitenflächen“ $\psi^{(-i)}, \psi^{(i)}: Q_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ für $i = 1, 2, 3$ mit $Q_1 := [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, $Q_2 := [a_1, b_1] \times [a_3, b_3]$ und $Q_3 := [a_1, b_1] \times [a_2, b_3]$ durch

$$\begin{aligned} \psi^{(-1)}(v, w) &:= \psi(a_1, v, w), & \psi^{(1)}(v, w) &:= \psi(b_1, v, w), \\ \psi^{(-2)}(w, u) &:= \psi(u, a_2, w), & \psi^{(2)}(w, u) &:= \psi(u, b_2, w), \\ \psi^{(-3)}(u, v) &:= \psi(u, v, a_3), & \psi^{(3)}(u, v) &:= \psi(u, v, b_3). \end{aligned}$$

Dann gilt für alle C^1 -Vektorfelder $Y: V \rightarrow \mathbb{R}^3$, dass

$$\int_Q \operatorname{div}_{\psi(u,v,w)}(Y) \det(d_{(u,v,w)}\psi) \, dudvdw = \sum_{i=1}^3 \left(\int_{(Q_i, \psi^{(i)})} Y \cdot d\vec{\sigma} - \int_{(Q_i, \psi^{(-i)})} Y \cdot d\vec{\sigma} \right)$$

Beweis. Wir betrachten, wie beim Beweis des Satzes von Stokes (Satz 2.10), den Integranden auf der Rechten Seite. Mithilfe von Lemma 2.8 und der Notation $\partial_\alpha \psi = \psi_\alpha$ sowie $\partial_\beta \partial_\alpha \psi = \psi_{\alpha\beta}$ folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\psi(Y) \det d\psi &= \langle J_Y \psi_u, \psi_v \times \psi_w \rangle + \langle J_Y \psi_v, \psi_w \times \psi_u \rangle + \langle J_Y \psi_w, \psi_u \times \psi_v \rangle \\ &= \langle \partial_u(Y \circ \psi), \psi_v \times \psi_w \rangle + \langle \partial_v(Y \circ \psi), \psi_w \times \psi_u \rangle + \langle \partial_w(Y \circ \psi), \psi_u \times \psi_v \rangle. \end{aligned}$$

Verwenden wir nun die Produktregel „ $\partial_\alpha \langle a, b \rangle = \langle \partial_\alpha a, b \rangle + \langle a, \partial_\alpha b \rangle$ “ für Skalarprodukte und den Satz von Schwarz, d.h. $\psi_{vu} = \psi_{uv}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\psi(Y) \det d\psi &= \partial_u \langle Y \circ \psi, \psi_v \times \psi_w \rangle - \langle Y \circ \psi, \psi_{vu} \times \psi_w \rangle - \langle Y \circ \psi, \psi_v \times \psi_{wu} \rangle \\ &\quad + \partial_v \langle Y \circ \psi, \psi_w \times \psi_u \rangle - \langle Y \circ \psi, \psi_{wv} \times \psi_u \rangle - \langle Y \circ \psi, \psi_w \times \psi_{uv} \rangle \\ &\quad + \partial_w \langle Y \circ \psi, \psi_u \times \psi_v \rangle - \langle Y \circ \psi, \psi_{uw} \times \psi_v \rangle - \langle Y \circ \psi, \psi_u \times \psi_{vw} \rangle \\ &= \partial_u \langle Y \circ \psi, \psi_v \times \psi_w \rangle + \partial_v \langle Y \circ \psi, \psi_w \times \psi_u \rangle + \partial_w \langle Y \circ \psi, \psi_u \times \psi_v \rangle. \end{aligned}$$

Integrieren wir nun und wenden den Satz von Fubini an, so gilt

$$\begin{aligned} \int_Q \operatorname{div}_\psi(Y) \det(d\psi) \, dudvdw &= \int_{Q_1} \left(\int_{a_1}^{b_1} \partial_u \langle Y \circ \psi, \psi_v \times \psi_w \rangle \, du \right) dvdw \\ &+ \int_{Q_2} \left(\int_{a_2}^{b_2} \partial_v \langle Y \circ \psi, \psi_w \times \psi_u \rangle \, dv \right) dwdu \\ &+ \int_{Q_3} \left(\int_{a_3}^{b_3} \partial_w \langle Y \circ \psi, \psi_u \times \psi_v \rangle \, dw \right) dudv \end{aligned}$$

Auf jeden dieser Summanden können wir nun den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung anwenden. Dann gilt z.B. für den ersten Summand

$$\begin{aligned} \int_{Q_1} \left(\int_{a_1}^{b_1} \partial_u \langle Y \circ \psi, \psi_v \times \psi_w \rangle \, du \right) dvdw &= \int_{Q_1} \langle Y \circ \psi, \psi_v \times \psi_w \rangle (b_1, v, w) \, dvdw \\ &- \int_{Q_1} \langle Y \circ \psi, \psi_v \times \psi_w \rangle (a_1, v, w) \, dvdw \\ &= \int_{(Q_1, \psi^{(1)})} Y \cdot d\vec{\sigma} - \int_{(Q_1, \psi^{(-1)})} Y \cdot d\vec{\sigma}. \quad \square \end{aligned}$$

Wieder lässt sich aus der lokalen Version des Satzes eine globale Version für Mannigfaltigkeiten mit Rand ableiten. Wie im den zweidimensionalen Fall (Abschnitt 2.3.1) müssen wir hierfür klären, was das **äußere Einheitsnormalenfeld** ist. Intuitiv gesprochen zeigt dieses Einheitsnormalenfeld $N: \partial M \rightarrow \mathbb{R}^3$ immer aus der Mannigfaltigkeit M heraus. Formal lässt sich diese Intuition durch die folgenden zwei äquivalenten Möglichkeiten modellieren:

- Sei (U, V, ψ) eine orientierungserhaltende lokale Parametrisierung, also $\det d\psi > 0$. Wir wollen als Konvention verabreden, dass die die Koordinaten im „*Parameterraum*“ immer durch $(u, v, w) \in U$ bezeichnet werden wohingegen die Koordinaten im „*Ortsraum*“ im Folgenden immer $(x, y, z) \in V$ sein werden. Dann ist das äußere Einheitsnormalenfeld für $p \in \partial M \cap V$ gegeben durch

$$N(p) := -\frac{\partial_u \psi \times \partial_v \psi}{\|\partial_u \psi \times \partial_v \psi\|}(u_p, v_p, 0),$$

wobei $\psi^{-1}(p) = (u_p, v_p, 0) \in \overline{\mathbb{H}^3} \cap U$ ist.

- Sei $p \in \partial M$. Dann gibt es immer ein $\epsilon > 0$ und eine reguläre C^1 -Kurve $\gamma: [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) \in N_p M$, sodass $\gamma(t) \in \operatorname{int}(M)$ genau dann, wenn $t < 0$ (*Übung: Überlegt euch warum!*). Dann ist das äußere Einheitsnormalenfeld in p gegeben durch

$$N(p) := \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}(0).$$

Satz 2.16 — Divergenzsatz von Gauß (für Mannigfaltigkeiten mit Rand). Sei $M \subset V \subset \mathbb{R}^3$ wobei M eine kompakte 3-dimensionale C^2 -Untermannigfaltigkeit und V eine offene Menge ist. Weiterhin sei $N: \partial M \rightarrow \mathbb{R}^3$ das äußere Einheitsnormalenfeld von M . Dann gilt für jedes C^1 -Vektorfeld $Y: V \rightarrow \mathbb{R}^3$, dass

$$\int_M \operatorname{div}(Y) \, dx dy dz = \int_{\partial M} \langle Y, N \rangle \, d\sigma.$$

Beweisskizze. Der Beweis ist wieder sehr ähnlich zum Beweis für den entsprechenden Satz von Stokes (Satz 2.12). Es lohnt sich beide Beweise zu vergleichen.

- Jeder Punkt $p \in M$ besitzt eine offene Umgebung $V_p \subset \mathbb{R}^3$, sodass $M \cap V_p$ orientierungserhaltend durch einen Quader parametrisiert werden kann, d.h., es existiert eine lokale Parametrisierung (U_p, V_p, ψ_p) mit $\det d\psi_p > 0$ und

$$U_p := (a_{1,p}, b_{1,p}) \times (a_{2,p}, b_{2,p}) \times (a_{3,p}, b_{3,p}).$$

- Da M kompakt ist, reichen endlich viele dieser lokalen Parametrisierungen $\{(U_i, V_i, \psi_i)\}_{i=1}^s$ aus, um ganz M zu parametrisieren, d.h., es gilt $M \subset \bigcup_{i=1}^s V_i$. Weiterhin kann nachgewiesen werden (*Übung!*), dass es $\epsilon_i > 0$ existieren, sodass sogar $M \subset \bigcup_{i=1}^s \psi_i(Q_i)$, wobei

$$Q_i := [a_{1,i} + \epsilon_i, b_{1,i} - \epsilon_i] \times [a_{2,i} + \epsilon_i, b_{2,i} - \epsilon_i] \times [a_{3,i} + \epsilon_i, b_{3,i} - \epsilon_i] \subset \overline{\mathbb{H}^3}.$$

- Lemma 2.4 garantiert uns, dass eine zu $\{V_i\}_{i=1}^s$ untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\varphi_i\}_{i=1}^s$ existiert. Es ist möglich diese Zerlegung so zu wählen (*Übung!*), dass

$$\text{supp}(\varphi_i) \cap M \subset \psi_i(\text{int}(Q_i)).$$

- Wir definieren $Y_i := \varphi_i Y$. Da alle φ_i C^∞ -Abbildungen sind, „erbt“ Y_i die Regularität von Y . Somit folgt aus der Linearität der Divergenz, dass

$$\text{div}(Y) = \text{div}(Y_1) + \dots + \text{div}(Y_s).$$

Weiterhin folgt aus $\text{supp}(\varphi_i) \cap M \subset \psi_i(\text{int}(Q_i))$, dass $\text{supp}(Y_i) \cap M \subset \psi_i(\text{int}(Q_i))$.

- Aus der Linearität des Riemann-Integrals, dass wir nur noch jedes $\text{div}(Y_i)$ einzeln zu betrachten müssen. Weiterhin zeigt uns der Transformationssatz (Satz 1.10) dass

$$\int_M \text{div}(Y_i) \, dx dy dz = \int_{U_i} \text{div}_{\psi}(Y) \det d\psi_i \, du dv dw = \int_{Q_i} \text{div}_{\psi}(Y) \det d\psi_i \, du dv dw,$$

wobei die letzte Gleichheit aus $\text{supp}(Y_i) \cap M \subset \text{int}(\psi_i(Q_i))$ folgt.

- Wieder gibt es zwei Fälle:

- $\psi_i|_{Q_i}$ parametrisiert ein inneres Stück von M , d.h., $Q_i \cap \overline{\mathbb{H}^3} = \emptyset$. Dann folgt aus dem dem Satz von Gauß für Quader (Satz 2.15), dass

$$\int_{Q_i} \text{div}_{\psi}(Y) \det d\psi_i \, du dv dw = \int_{\partial Q_i} (\langle Y_i, N \rangle \circ \psi_i) \, d\sigma = 0,$$

wobei die letzte Gleichheit aus $(Y_i \circ \psi_i)|_{\partial Q_i} = 0$ folgt.

- $\psi_i|_{Q_i}$ parametrisiert ein Stück von M am Rand, d.h., $Q_i \cap \overline{\mathbb{H}^3} \neq \emptyset$. Dieses mal folgt aus Satz 2.15, dass

$$\begin{aligned} \int_{Q_i} \text{div}_{\psi}(Y) \det d\psi_i \, du dv dw &= \int_{\partial Q_i} (\langle Y_i, N \rangle \circ \psi_i) \, d\sigma \\ &= \int_{\partial M \cap \psi_i(Q_i)} (\langle Y_i, N \rangle \circ \psi_i) \, d\sigma, \end{aligned}$$

da $(Y_i \circ \psi_i)|_{\partial Q_i}(p) \neq 0$ nur für $p \in \partial Q \cap \overline{\mathbb{H}^3}$ möglich ist. □

2.4 Potentialtheorie

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit zwei wesentlichen Fragen beschäftigen. Die erste fragt, wann wir gegebene Bewegungsgleichungen „aufintegrieren“ können:

*Welche Vektorfelder Y besitzen ein Potential Φ ?
(d.h., lassen sich als $Y = \text{grad}(\Phi)$ schreiben.)*

Diese Aufgabe soll uns in den Abschnitten 2.4.1 und 2.4.2 beschäftigen. Aufbauend auf unsere Antworten, werden wir versuchen diese Potentiale besser zu verstehen. Insbesondere, wird uns interessieren:

*Wie hängt die Quelledichte $\text{div}(Y)$ eines konservativen Vektorfelds Y
mit seinem Potential Φ zusammen?*

Mit diesem Problem werden wir uns in den Abschnitten 2.4.3 – 2.4.5 befassen.

2.4.1 Konservative Vektorfelder

Wir sagen, dass ein stetiges Vektorfeld $Y: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein **Potential** besitzt, wenn es eine C^1 -Abbildung $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass $Y = \text{grad}(\Phi)$. In diesem Fall wird Y auch ein **Potentialfeld** genannt. Wir wollen nun herausfinden, welche Vektorfelder Potentialfelder sind, und wie wir ein Potential für sie bestimmen können. Eine natürliche Möglichkeit ein Vektorfeld zu „integrieren“ stellt das Kurvenintegral dar. Mengen für die dieser Ansatz sinnvoll ist, heißen wegzusammenhängend: Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist **wegzusammenhängend**, wenn für alle $p, q \in U$ eine stetige Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ existiert mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$. (Also ein „Weg“ zwischen p und q .)

Definition 2.12. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, wegzusammenhängende Menge. Ein stetiges Vektorfeld $Y: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **konservativ**, wenn für alle $p, q \in U$ und alle C^1 -Kurven $\gamma, \tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow U$ mit $\gamma(0) = p = \tilde{\gamma}(0)$ und $\gamma(1) = q = \tilde{\gamma}(1)$ gilt

$$\int_{\gamma} Y \cdot d\vec{s} = \int_{\tilde{\gamma}} Y \cdot d\vec{s},$$

d.h., wenn Kurvenintegrale **wegunabhängig** sind, also nur von den Endpunkten p und q abhängen, aber nicht vom gewählten Weg.

Lemma 2.9. Ein Vektorfeld $Y: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist konservativ, genau dann, wenn $\int_{\gamma} Y \cdot d\vec{s} = 0$ für alle geschlossenen C^1 -Kurven $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$, d.h. $\gamma(0) = \gamma(1)$, gilt.

Beweis. Übung! □

Es stellt sich heraus, dass Konservativität genau die benötigte Eigenschaft ist, um Potentialfeld zu charakterisieren.

Satz 2.17. Ein stetiges Vektorfeld $Y: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ über einer offenen wegzusammenhängenden Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ besitzt genau dann ein Potential, wenn Y konservativ ist.

Beweis. „ \Rightarrow “: Angenommen Y besitzt ein Potential $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. $Y = \text{grad}(\Phi)$, dann folgt die Konservativität aus

$$\int_{\gamma} Y \cdot d\vec{s} = \Phi(\gamma(1)) - \Phi(\gamma(0)).$$

für alle C^1 -Kurven $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ (Satz 2.4).

„ \Leftarrow “: Nehmen wir nun an, dass Y konservativ ist. Wir werden erst einen Kandidaten für das Potential definieren und dann zeigen, dass dieser auch tatsächlich ein Potential ist. Sei hierfür $p \in U$. Wir definieren $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\Phi(p) := 0$ und

$$\Phi(q) := \int_{\gamma_q} Y \cdot d\vec{s}$$

für $q \in U$, wobei $\gamma_q: [0, 1] \rightarrow U$ eine C^1 -Kurve ist mit $\gamma_q(0) = p$ und $\gamma_q(1) = q$. Die Konservativität von Y garantiert uns, dass diese Definition tatsächlich Sinn ergibt, also, dass die Definition von $\Phi(q)$ nicht von der Wahl der Kurve γ_q abhängt.

Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass auch wirklich $\text{grad}(\Phi) = Y$ gilt. Da U offen ist gibt es für jedes q ein $\epsilon > 0$, sodass $q + he_i \in U$ für alle $|h| < \epsilon$ und $i = 1, \dots, n$. Eine Kurve von p nach $q + he_i$ ist nun gegeben durch $\gamma_{q+he_i}: [0, 1] \rightarrow U$ mit

$$\gamma_{q+he_i}: t \mapsto \begin{cases} \gamma_q(2t) & , t \in [0, 1/2), \\ q + h(2t - 1)e_i & , t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Es folgt, dass

$$\int_{\gamma_{q+he_i}} Y \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_q} Y \cdot d\vec{s} = \int_0^h \langle Y(q + te_i), e_i \rangle dt = \int_0^h Y_i(q + te_i) dt.$$

Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung zeigt somit, dass $\partial_{x_i} \Phi(q) = Y_i(q)$. □

Anmerkung 2.4.

- Die Konstruktion von Φ im obigen Beweis gibt eine Möglichkeit Potentiale tatsächlich auszurechnen. In der Praxis empfiehlt es sich dann natürlich über möglichst einfache Kurven zu integrieren, z.B. (achsenparallele) Geradenstücke.
- Das Potential eines Potentialfelds ist eindeutig bestimmt bis auf eine additive Konstante. In der Konstruktion des obigen Beweises, entspricht sie genau der freien Wahl eines Startpunktes $p \in U$.

2.4.2 Existenz von Potentialen

Wir haben nun eine Möglichkeit das Potential eines Vektorfeldes zu berechnen, vorausgesetzt es ist konservativ. Es bleibt also die Aufgabe (möglichst allgemeine) Kriterien anzugeben, wann dies der Fall ist.

Vorlesung 15
(03.12.24)

Lemma 2.10. Ist $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^2 -Abbildung. Dann gilt

$$\text{Rot}(\text{grad}(\Phi)) = 0.$$

Beweis. Es gilt $J_{\text{grad}(\Phi)} = \text{Hess}(\Phi)$. Nach dem Satz von Schwarz ist $\text{Hess}(\Phi)$ symmetrisch, also,

$$0 = \text{Hess}(\Phi) - \text{Hess}(\Phi)^T = J_{\text{grad}(\Phi)} - J_{\text{grad}(\Phi)}^T = \text{Rot}(\text{grad}(\Phi)). \quad \square$$

Somit ist $\text{Rot}(Y) = 0$ eine *notwendige Bedingung* für ein Potentialfeld. Diese Aussage ist wichtig genug um in einem Satz zusammengefasst zu werden.

Satz 2.18. Ist $Y: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Potentialfeld, dann gilt $\text{Rot}(Y) = 0$.

Felder die diese Bedingung erfüllen nennen wir **rotationsfrei** (oder auch *wirbelfrei*). Da diese Bedingung mithilfe eines Differentialoperators gestellt wird, ist sie *lokal*. In diesem Fall meint das, dass diese Bedingung etwas über die „Beschaffenheit“ des Vektorfeldes in einer „kleinen“ Umgebung um jeden Punkt aussagt. Sie berücksichtigt aber nicht die *globale* „Beschaffenheit“ des Raums (hier U), auf dem unser Vektorfeld definiert ist. Das folgende Beispiel zeigt uns aber, dass die globale Beschaffenheit von U für die Existenz eines Potentials nicht vernachlässigt werden kann.

Beispiel 2.12 — Magnetfeld eines unendlichen Leiters. Sei $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und

$$Y(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Bis auf physikalische Konstanten ist das der (horizontale) Querschnitt des Magnetfeldes eines unendlich langen Leiters. Wir rechnen nach, dass

$$\text{rot}_{(x,y)} Y = (\partial_y Y_1 - \partial_x Y_2)(x, y) = \frac{2y^2 - (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

Das Vektorfeld Y ist also rotationsfrei. Aber das Kurvenintegral von Y über den durch $\gamma: t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi)$, parametrisierten Einheitskreis ist gegeben durch

$$\int_{\gamma} Y \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{-\sin(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} \\ \frac{\cos(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0.$$

Also kann Y kein konservatives Vektorfeld über $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sein (Lemma 2.9). Allerdings ist das nicht das Ende der Geschichte. Schränkten wir den Raum auf dem wir ein Potential suchen ein, dann können wir ein Potential finden: Betrachten wir z.B. $\tilde{U} := \{x > 0\}$. Dann kann man nachrechnen (*Übung!*), dass

$$\Phi: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \arctan(y/x)$$

ein Potential für $Y|_{\tilde{U}}$ ist.

Dieses Beispiel zeigt klar, dass die Existenz eines Potentials auch vom Definitionsbereich des Vektorfeldes abhängt. Was ist nun der Unterschied zwischen $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $\{x > 0\}$? Intuitiv gesprochen, dass die erste Menge ein „Loch“ hat und die zweite nicht. Mathematisch formalisieren wir dies dadurch, dass wir verlangen, dass sich jede stetige Kurve stetig in jede andere Kurve mit den gleichen Anfangs- und Endpunkten deformieren lässt.

Definition 2.13. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend. Stetige Kurven $\gamma, \tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow U$ mit $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = p$ und $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(1) = q$ heißen **homotop** in U (mit festen Endpunkten), wenn eine stetige Abbildung $\psi: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ existiert, sodass für die Kurven $\gamma_s: t \mapsto \psi(s, t)$ gilt

- $\gamma_0 = \gamma$ und $\gamma_1 = \tilde{\gamma}$;
- $\gamma_s(0) = x_0$ und $\gamma_s(1) = x_1$ für alle $s \in [0, 1]$.

Die Abbildung ψ heißt **Homotopie** zwischen γ und $\tilde{\gamma}$. Sind beliebige zwei Kurven in U mit gleichem Anfangs- und Endpunkt homotop, dann heißt U **einfach zusammenhängend**.

Lemma 2.11. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Es gilt

- U ist konvex $\Rightarrow U$ ist sternförmig $\Rightarrow U$ ist einfach zusammenhängend.
- Ist $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus und U einfach zusammenhängend, dann ist auch $\varphi(U)$ einfach zusammenhängend.

Beweis. Übung! □

Diese Definition gibt uns hinreichende globale Bedingungen für die Existenz eines Potentials.

Satz 2.19. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, einfach zusammenhängende Menge und $Y: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein rotationsfreies C^1 -Vektorfeld. Dann besitzt Y ein Potential.

Beweis. Um die Existenz eines Potentials zu zeigen, reicht es zu zeigen, dass Y konservativ ist (Satz 2.17). Nun merke ich zuerst an (ohne Beweis), dass wir *o.B.d.A.* annehmen können, dass wir Homotopien betrachten, die sogar C^2 -Abbildungen sind. Dann erfüllt die Homotopie ψ genau die Anforderungen, die wir für den Rotationsatz (Satz 2.10) benötigen. Anwenden dieses Satzes zeigt die Konservativität. (*Übung: Arbeit die Details aus.*) □

Anmerkung 2.5. Einfacher Zusammenhang ist *nicht notwendig* für die Existenz eines Potentials, denn starten wir auf einer beliebigen offenen Menge mit einem C^1 -Skalarfeld, dann ist dieses (per Definition) das Potential ihres Gradienten. Ein Beispiel hierfür ist die Funktion $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^{-1/2}$ über $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

In der Regel ist es nicht trivial zu beweisen, dass eine Menge nicht einfach zusammenhängend ist. Allerdings gibt uns der obige Satz ein Hilfsmittel, dass einen interessanten Zusammenhang zwischen topologischen Eigenschaften eines Raumes (hier: einfacher Zusammenhang) und analytischen Eigenschaften von Vektorfeldern über diesem Raum (hier: Konservativität) zeigt.

Satz 2.20. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene wegzusammenhängende Menge. Existiert ein rotationsfreies Vektorfeld $Y: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, das nicht konservativ ist, dann ist U nicht einfach zusammenhängend.

Korollar 2.1. Die Mengen $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $\mathbb{R}^3 \setminus \{z = 0\}$ sind nicht einfach zusammenhängend.

Beweis. Folgt aus dem vorangegangenen Satz 2.20 und Beispiel 2.12. □

2.4.3 Der Laplace-Operator

Wir beginnen mit einer physikalischen Motivation für die Betrachtung des Laplace-Operators: Sei $E: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein elektrisches Feld auf einer Untermannigfaltigkeit mit Rand $M \subset \mathbb{R}^3$, die diffeomorph zur abgeschlossenen Kugel $\mathbb{B}_1^3(0)$ ist. Sei $N: \partial M \rightarrow \mathbb{R}^3$ das äußere Einheitsnormalenfeld von M . Dann setzt das *Gauß'sche Gesetz* die Ladungsdichte $\rho: M \rightarrow \mathbb{R}$ in M in Beziehung zur Oberflächenladungsdichte auf ∂M durch

$$\int_{\partial M} \langle E, N \rangle d\sigma = \int_M \rho dx.$$

Wenden wir auf die linke Seite den Divergenzatz (Satz 2.14) an, so erhalten wir die differenzielle Form des Gauß'schen Gesetzes — $\operatorname{div}(E) = \rho$. Nehmen wir an, dass das Magnetfeld $B: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ statisch ist, dann folgt aus dem *Induktionsgesetz* $\operatorname{rot}(E) = -\partial B / \partial t$, dass E rotationsfrei ist. Somit zeigt uns Satz 2.19, dass E ein Potential $\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt. Setzen wir dieses in das Gauß'sche Gesetz ein, so erhalten wir den Zusammenhang $\rho = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \Phi) =: \Delta \Phi$.

Definition 2.14. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der **Laplace-Operator** $\Delta: C^2(U) \rightarrow C^0(U)$ ist definiert durch

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f).$$

Es folgt direkt aus der Definition, dass $\Delta f = \operatorname{tr} \operatorname{Hess}(f) = \sum \partial_i^2 f$. Übliche suggestive Schreibweisen für den Laplace-Operator sind $\nabla \cdot \nabla f$ und $\nabla^2 f$. Die Differentialgleichung $\Delta f = g$ heißt **Poisson-Gleichung**. Im Spezialfall, dass $g \equiv 0$ ist, also $\Delta f = 0$, wird diese Gleichung auch als **Laplace-Gleichung** bezeichnet. Lösungen der Laplace-Gleichung heißen **harmonische Funktionen**.

Lemma 2.12. Der Laplace-Operator ist linear.

Beweis. Die Operatoren grad und div sind linear. \square

Lösungen der Poisson-Gleichung sind im Allgemeinen nicht eindeutig, denn ist $\Delta f = g$ und H eine harmonische Funktion, dann zeigt die Linearität, dass auch $\Delta(f + H) = \Delta f = g$ ist. Für unser motivierendes Beispiel heißt das, dass wir das elektrische Potential Φ beliebig um eine harmonische Funktion ändern können, ohne die physikalische Observable (hier ρ) zu verändern. In der Physik wird dies als **Eichfreiheit** (engl. *gauge freedom*) bezeichnet. Es ist somit von Interesse den Laplace-Operator und harmonische Funktionen besser zu verstehen.

Satz 2.21. Der Laplace-Operator ist translations- und rotationsinvariant, d.h., ist $f \in C^2(U)$ und $T(x) := Ax + b$ für $A \in \operatorname{SO}(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$\Delta(f \circ T) = (\Delta f) \circ T.$$

Beweis. Dieser Satz folgt aus der Jacobi-Formel (Satz 2.22). (*Übung: Arbeitet die Details aus.*) \square

Um diese Aussage zu beweisen werden wir uns das Transformationsverhalten von unseren Differentialoperatoren anschauen. Elementar kann dieses auf die Kettenregel zurückgeführt werden. Das führt allerdings zu sehr langen und unübersichtlichen Rechnungen. Wir werden einen anderen Ansatz verfolgen.

Hierfür müssen wir noch etwas Notation einführen. Die **Gram'sche Matrix** bezüglich eines Diffeomorphismus $\varphi: U \rightarrow V$ (d.h., Koordinatentransformation) ist die Matrix $J_\varphi^T J_\varphi =: G = (g_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Sie drückt die „Transformation“ des Skalarproduktes aus, denn

$$g_{ij} = e_i^T J_\varphi^T J_\varphi e_j = \langle J_\varphi e_i, J_\varphi e_j \rangle = \langle d\varphi(e_i), d\varphi(e_j) \rangle.$$

Die Determinante der Gram'schen Matrix $g := \det G$ ist als **Gram'sche Determinante** bekannt. Der Determinantenmultiplikationssatz zeigt, dass sie das Quadrat der Funktionaldeterminante ist, d.h. $\sqrt{g} = |\det d\varphi|$. Ist die Gram'sche Matrix diagonal, d.h., $g_{ij} = 0$ für $i \neq j$, so nennen wir die Koordinaten φ **orthogonal**. In diesem Fall lässt sich die Inverse der Gram'schen Matrix $G^{-1} = (g^{ij})$ sehr leicht bestimmen, denn G^{-1} ist auch orthogonal und es gilt

$$g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}}.$$

Wir werden nun zuerst Transformationsformeln für den Gradienten und die Divergenz herleiten. Hieraus ergibt sich dann sofort eine Transformationsformel für den Laplace-Operator.

Lemma 2.13. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi: U \rightarrow V$ ein C^2 -Diffeomorphismus. Bezeichne G^{-1} die Inverse der Gram'schen Matrix (bzgl. φ). Dann gilt für alle $f \in C^1(V)$, dass

$$d\varphi^{-1}(\text{grad}(f)) = G^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial \xi_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial \xi_n} \end{pmatrix},$$

wobei $V \ni x = (x_1, \dots, x_n) = \varphi(\xi)$ mit $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in U$.

Beweis. Um die Notation zu vereinfachen, definieren wir $F := f \circ \varphi$. Nun folgt aus der Kettenregel, dass

$$\text{grad}(f) = J_f^\top = J_{F \circ \varphi^{-1}}^\top = (J_F J_{\varphi^{-1}})^\top = J_{\varphi^{-1}}^\top J_F^\top.$$

Verwenden wir nun den Umkehrsatz, insbesondere $J_{\varphi^{-1}} = J_\varphi^{-1}$, dann sehen wir, dass

$$d\varphi^{-1}(\text{grad}(f)) = J_{\varphi^{-1}} J_{\varphi^{-1}}^\top J_F^\top = J_\varphi^{-1} (J_\varphi^{-1})^\top \begin{pmatrix} \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial \xi_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial \xi_n} \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial \xi_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial \xi_n} \end{pmatrix}. \quad \square$$

Um die Transformationsformel für die Divergenz herzuleiten verwenden wir die n -dimensionale Verallgemeinerung der Charakterisierung der Divergenz mithilfe der Determinante (Lemma 2.8). Der Beweis verläuft gänzlich analog, weshalb ich euch die Details als Übung überlasse.

Lemma 2.14. Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $Y: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld. Dann gilt

$$\text{div}(Y) \det(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n \det(X_1, \dots, X_{i-1}, dY(X_i), X_{i+1}, \dots, X_n) \quad (2.6)$$

für alle $X_1, \dots, X_n \in \mathbb{R}^n$.

Anmerkung 2.6. Die Notation für die rechte Seite der Gleichung bedarf einer Anmerkung: Sie ist so zu verstehen, dass für den i -ten Summanden der Vektor X_i durch die Richtungsableitung $dY(X_i)$ ersetzt wird. Insbesondere ist der erste Summand $\det(dY(X_1), X_2, \dots, X_n)$ und der letzte Summand $\det(X_1, \dots, X_{n-1}, dY(X_n))$.

Lemma 2.15. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi: U \rightarrow V$ ein C^2 -Diffeomorphismus. Bezeichne g die Gram'sche Determinante (bzgl. φ). Dann gilt für alle C^1 -Vektorfelder $Y: V \rightarrow \mathbb{R}^n$, dass

$$\text{div}(Y) \circ \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\tilde{Y}_i \sqrt{g}).$$

wobei $Y \circ \varphi =: \tilde{Y} = \sum_{i=1}^n \tilde{Y}_i d\varphi(e_i)$ und $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in U$.

Beweis. Wir beobachten zuerst, dass $X_i := d\varphi(e_i) = \partial\varphi/\partial\xi_i$ eine Basis des \mathbb{R}^n ist, da φ ein Diffeomorphismus und somit $d\varphi$ ein Isomorphismus ist. Es folgt somit

$$\det(X_1, \dots, X_n) = \det d\varphi = \det J_\varphi = \sqrt{g}.$$

Betrachten wir nun die rechte Seite der Gleichung (2.6). Für $p \in U$ zeigt die Kettenregel, dass

$$d_{\varphi(p)}Y(X_i) = d_{\varphi(p)}Y(d_p\varphi(e_i)) = d_p(Y \circ \varphi)(e_i) = \left. \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right|_p \tilde{Y}.$$

Aus der Multi-Linearität der Determinante folgt für jeden Summanden, dass

$$\begin{aligned} \det(X_1, \dots, X_{i-1}, d_{\varphi}Y(X_i), X_{i+1}, \dots, X_n) &= \frac{\partial}{\partial \xi_i} \det(X_1, \dots, X_{i-1}, \tilde{Y}, X_{i+1}, \dots, X_n) \\ &\quad - \sum_{j \neq i} \det(X_1, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi_i} X_j, \dots, \tilde{Y}, \dots, X_n). \end{aligned}$$

Aus der Alterniertheit der Determinante und dem Satz von Schwarz folgt dann, dass sich die „doppelten Ableitungen“ in Gleichung (2.6) wegheben, d.h.,

$$\sum_{i=1}^n \det(X_1, \dots, X_{i-1}, d_{\varphi}Y(X_i), X_{i+1}, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i} \det(X_1, \dots, X_{i-1}, \tilde{Y}, X_{i+1}, \dots, X_n).$$

Einsetzen der Basisdarstellung $\tilde{Y} = \sum_{i=1}^n \tilde{Y}_i X_i$ und erneutes Ausnutzen der Alterniertheit der Determinante liefert das Resultat. \square

Satz 2.22 — Jacobi-Formel. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi: U \rightarrow V$ ein C^2 -Diffeomorphismus. Bezeichne $G = (g_{ij})$ die Gram'sche Matrix, $G^{-1} = (g^{ij})$ und $g = \det G$. Dann gilt für alle $f \in C^2(V)$, dass

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) \circ \varphi = (\Delta f) \circ \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial \xi_j} \right).$$

wobei $V \ni x = (x_1, \dots, x_n) = \varphi(\xi)$ mit $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in U$.

Beweis. Folgt durch Einsetzen der Transformationsformel für den Gradienten in die Transformationsformel für die Divergenz. \square

Diese Formel mag auf den ersten Blick kompliziert wirken. Das folgende Beispiel wird aber veranschaulichen, dass sie sich recht einfach auf die üblichen Koordinatensysteme anwenden lässt.

Beispiel 2.13 — Laplace-Operator in Polarkoordinaten. Wir betrachten die Polarkoordinaten $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ mit $(r, \theta) \in U = (0, R) \times (0, 2\pi)$. Dann ist

$$J_{\varphi}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Somit folgt durch direktes Nachrechnen, dass

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g = r^2.$$

Somit erhalten wir für $f \in C^2(\varphi(U))$ und $F := f \circ \varphi$ durch Einsetzen in die Jacobi-Formel, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot 1 \cdot \frac{\partial}{\partial r} F(r, \theta) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r \cdot \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} F(r, \theta) \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} F(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} F(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} F(r, \theta), \end{aligned}$$

Nachdem wir nun das Transformationsverhalten des Laplace-Operators verstanden haben, wollen wir uns noch eine wichtige Eigenschaft von harmonischen Funktionen anschauen.

Satz 2.23 — Maximums-Prinzip. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f \in C^0(\bar{U}) \cap C^2(U)$ harmonisch. Dann gilt

$$\min_{x \in \partial U} f(x) \leq f \leq \max_{x \in \partial U} f(x),$$

d.h., Maximal- bzw. Minimalstellen von f liegt auf dem Rand von U (oder f ist konstant).

Beweis. Wir betrachten nur die Aussage für Maximalstellen. Der Beweis für Minimalstellen erfolgt analog (*Übung!*). Weiterhin nehmen wir an, dass f keine konstante Funktion ist, denn für diese ist die Aussage trivial. Sei nun $\epsilon > 0$. Wir definieren

$$g(x) := f(x) + \epsilon \|x\|^2.$$

Da g stetig ist und \bar{U} kompakt, existiert ein $x_0 \in \bar{U}$ mit $\sup_{x \in \bar{U}} f(x) = f(x_0)$. Wir behaupten, dass $x_0 \in \partial U$. Angenommen dem wäre nicht so. Dann wäre $\text{Hess}_{x_0}(g)$ negativ semi-definit, also alle Eigenwerte von $\text{Hess}_{x_0}(g)$ wären nicht positiv. Wir rechnen aber nach, dass

$$\text{tr Hess}_{x_0}(g) = (\Delta g)(x_0) = \underbrace{(\Delta f)(x_0)}_{=0, \text{ harmonisch}} + 2n\epsilon > 0$$

was einen Widerspruch darstellt, weil $\text{tr Hess}_{x_0}(g)$ gleich der Summe der Eigenwerte von $\text{Hess}_{x_0}(g)$ ist. Somit gilt $f(x) \leq g(x) \leq g(x_0) = f(x_0) + \epsilon \|x_0\|^2$ für alle $x \in U$. Da $x_0 \in \partial U$ erhalten wir

$$\sup_{x \in U} f(x) \leq \sup_{x \in \partial U} f(x) + \epsilon \max_{x \in \partial U} \|x\|^2.$$

Lassen wir nun $\epsilon \rightarrow 0$ so erhalten wir die Behauptung. □

2.4.4 Dirichlet- und Neumann-Randwertprobleme

Wir wollen nun anschauen, wann eindeutige Lösungen der Poisson-Gleichung existieren. Wir haben bereits diskutiert, das wir für den Eindeigkeitsteil im Allgemeinen zusätzliche Bedingungen benötigen. Die physikalische Motivation, die wir am Anfang des vorangegangenen Abschnittes 2.4.3 besprochen haben, legt zwei Ansätze nahe.

Der erste Ansatz ist es die Werte für unsere gesuchte Lösung auf dem Rand der Mannigfaltigkeit festzulegen. In unserem Beispiel würde dies dem Anlegen eines elektrischen Potentials auf dem Rand entsprechen. Dies führt zu dem folgenden Randwertproblem.

Definition 2.15 — Dirichlet Randwertproblem. Seien $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \partial M \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Wir suchen ein $\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{cases} \Delta \Phi = f & \text{in int}(M), \\ \Phi|_{\partial M} = g & \text{auf } \partial M. \end{cases}$$

In der Formulierung des Problems habe ich absichtlich keine Anforderungen an die Funktionen f, g und M gestellt, da es eine Fülle an Literatur gibt, die untersucht, wie diese zu wählen sind, damit Existenz und Eindeutigkeit der Lösung bewiesen werden können (siehe [FK14]). Der folgende Satz stellt eine mögliche Wahl vor.

Satz 2.24. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine C^2 -Untermannigfaltigkeit mit Rand die diffeomorph zu $\overline{\mathbb{B}_1^3(0)}$ ist. Seien weiterhin $f \in C^1(M)$ und $g \in C^0(\partial M)$. Dann hat das Dirichlet Randwertproblem bezüglich (M, f, g) genau eine eindeutige Lösung $\Phi \in C^0(M) \cap C^2(\text{int}(M))$.

Beweis. Der Beweis der Existenz einer Lösung ist nicht einfach und wir werden an dieser Stelle nicht weiter darauf eingehen. Interessierte finden weitere Details und Literaturangaben in [FK14, §14]. Die Eindeutigkeit der Lösung können wir aber ohne Probleme mit unseren Mitteln beweisen.

Seien also Φ und $\tilde{\Phi}$ Lösungen für das Dirichlet Randwertproblem. Es folgt, dass

$$\Delta(\Phi - \tilde{\Phi}) = \Delta\Phi - \Delta\tilde{\Phi} = f - f = 0.$$

Analog folgt, dass $(\Phi - \tilde{\Phi})|_{\partial M} = 0$. Somit ist $\Phi - \tilde{\Phi}$ harmonisch und aus dem Maximums-Prinzip (Satz 2.23) folgt, dass

$$0 = \min_{\partial M}(\Phi - \tilde{\Phi}) \leq \Phi - \tilde{\Phi} \leq \max_{\partial M}(\Phi - \tilde{\Phi}) = 0.$$

Also folgt $\Phi - \tilde{\Phi} = 0$, was äquivalent zu $\Phi = \tilde{\Phi}$ ist. □

Der zweite Ansatz Eindeutigkeit für die Lösung der Poisson-Gleichung zu erhalten ist es, den Gradienten der Lösung in Richtung des äußeren Einheitsnormalenfelds festzulegen. Physikalisch entspricht das in unserem Beispiel dem Vorschreiben der Oberflächenladungsdichte auf dem Rand von M . Das zugehörige Randwertproblem ist

Vorlesung 17
(10.12.24)

Definition 2.16 — Neumann-Randwertproblem. Sei $N: \partial M \rightarrow \mathbb{R}^3$ das äußere Einheitsnormalenfeld von M . Für gegebene $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \partial M \rightarrow \mathbb{R}$ suchen wir ein $\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} \Delta\Phi = f & \text{in int}(M), \\ \langle \text{grad}\Phi, N \rangle = g & \text{auf } \partial M. \end{cases}$$

Wieder betrachten wir nur eine mögliche Wahl, wie wir M , f und g wählen können, um die Existenz eindeutiger Lösungen zu garantieren.

Lemma 2.16. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U)$ und $Y: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld. Dann gilt

$$\text{div}(fY) = f \text{div}(Y) + \langle \text{grad}(f), Y \rangle.$$

Beweis. Übung! □

Satz 2.25. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine C^2 -Untermannigfaltigkeit mit Rand die diffeomorph zu $\overline{\mathbb{B}_1^3(0)}$ ist. Seien weiterhin $f \in C^1(M)$ und $g \in C^1(\partial M)$. Dann hat das Dirichlet Randwertproblem bezüglich (M, f, g) genau dann eine Lösung $\Phi \in C^1(M) \cap C^2(\text{int}(M))$, wenn

$$\int_M f \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial M} g \, d\sigma. \quad (2.7)$$

Diese Lösung ist eindeutig bis auf eine additive Konstante.

Beweis. Wieder verweisen wir hier für den Beweis der Existenz auf [FK14, §14]. Die Notwendigkeit der Bedingung (2.7) und die Eindeutigkeit können wir aber wieder beweisen.

Zuerst zur Bedingung (2.7). Angenommen $\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}$ löst das Neumann-Randwertproblem für die Daten (M, f, g) . Dann ergibt der Divergenzsatz von Gauß (Satz 2.16), dass

$$\int_M f \, dx \, dy \, dz = \int_M \Delta \Phi \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial M} \langle \text{grad } \Phi, N \rangle \, d\sigma = \int_{\partial M} g \, d\sigma.$$

Somit ist die Bedingung (2.7) unerlässlich. Nun zur Eindeutigkeit. Seien Φ und $\tilde{\Phi}$ Lösungen zum Neumann-Randwertproblem für die Daten (M, f, g) . Wir definieren $H := \Phi - \tilde{\Phi}$. Wieder sehen wir, dass H harmonisch ist, d.h. $\Delta H = 0$. Weiterhin ist $\langle \text{grad } H, N \rangle = 0$ und durch Ausnutzen von Lemma 2.16 sehen wir ein, dass

$$\text{div}(H \text{grad}(H)) = H \text{div}(\text{grad}(H)) + \langle \text{grad}(H), \text{grad}(H) \rangle = \underbrace{H \Delta H}_{=0} + \|\text{grad}(H)\|^2.$$

Anwenden des Divergenzsatzes von Gauß ergibt

$$\int_M \|\text{grad}(H)\|^2 \, dx \, dy \, dz = \int_M \text{div}(H \text{grad}(H)) \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial M} \underbrace{\langle H \text{grad}(H), N \rangle}_{=0} \, d\sigma = 0.$$

Da $\|\text{grad}(H)\|^2$ eine nicht-negative stetige Funktion ist, folgt $\text{grad}(H) = 0$. Somit ist $\Phi = \tilde{\Phi} + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. \square

Anmerkung 2.7. Ich habe bereits angesprochen, dass es möglich ist M , f und g anders zu wählen und immer noch ähnliche Aussage wie in den vorangegangenen Sätzen zu erhalten. Ich möchte das noch einmal bekräftigen, indem ich darauf hinweise, dass die obigen Versionen auch *Innenraumproblem* genannt werden, denn wir lösen die Randwertprobleme im Inneren einer kompakten Mannigfaltigkeit M . Analog kann man sich auch das *Außenraumproblem* $\mathbb{R}^3 \setminus M$ bzw. das *Ganzraumproblem* auf ganz \mathbb{R}^3 anschauen. Allerdings benötigen wir zusätzliche Annahmen an f , damit z.B. die uneigentlichen Integrale existieren. Weiter Information findet ihr in [FK14].

2.4.5 Fundamentallösung des Laplace-Operators

Wir werden nun eine Integral-Formel herleiten, die uns einen Kandidaten für die Lösung Poisson-Gleichung gibt.

Lemma 2.17. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine C^2 -Untermannigfaltigkeit, die diffeomorph zu $\overline{\mathbb{B}_1^3(0)}$, und bezeichne $N: \partial M \rightarrow \mathbb{R}^3$ das äußere Einheitsnormalenfeld. Dann gilt für alle $f, g \in C^2(M)$, dass

$$\int_M f \Delta g - g \Delta f \, dx = \int_{\partial M} f \langle \text{grad } g, N \rangle - g \langle \text{grad } f, N \rangle \, d\sigma.$$

Beweis. Übung! (Tipp: Benutzt Lemma 2.16.) \square

Satz 2.26. Wir definieren die Funktion $\Gamma: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\Gamma(x) := \frac{1}{4\pi\|x\|}$. Es gilt

- (i) Γ ist harmonisch;
- (ii) $\text{grad } \Gamma(x) = \frac{-1}{4\pi} \frac{x}{\|x\|^3}$;

(iii) Ist $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zu $\overline{\mathbb{B}_1^3(0)}$ diffeomorphe C^2 -Untermannigfaltigkeit und $N: \partial M \rightarrow \mathbb{R}^3$ das äußere Einheitsnormalenfeld, dann gilt für alle $f \in C^2(M)$ und $x \in M$, dass

$$f(x) = - \int_M \Gamma_x(y) \Delta f(y) dy + \int_{\partial M} \Gamma_x \langle \text{grad } f, N \rangle - f \langle \text{grad } \gamma_x, N \rangle d\sigma, \quad (2.8)$$

wobei $\Gamma_x(y) := \Gamma(y-x)$ für $y \neq x$.

Beweis. Die Behauptungen (i) und (ii) folgen durch direktes Nachrechnen (*Übung!*).

Um nun die Gleichheit (2.8) herzuleiten, betrachten wir das Integral $\int_M \Gamma_x(y) \Delta f(y) dy$. Es handelt sich um ein uneigentliches Integral, da Γ_x eine Singularität in $y = x \in M$ hat. Wir wenden also nun den Ausschöpfungssatz (Satz 1.15) an, um dieses Integral zu berechnen. Hierfür beobachten wir, dass für hinreichend kleines $r > 0$ die Kugel $\overline{\mathbb{B}_r^3(x)} \subset \text{int } M$ ist, und dass Γ_x auf $M_r := M \setminus \mathbb{B}_r^3(x)$ wohldefiniert ist. Aus dem Lemma 2.17 folgt nun, dass

$$\begin{aligned} \int_{M_r} \Gamma_x(y) \Delta f(y) dy &= \int_{\partial M} \Gamma_x \langle \text{grad } f, N \rangle - f \langle \text{grad } \gamma_x, N \rangle d\sigma \\ &+ \int_{\partial \mathbb{B}_r^3(x)} \Gamma_x \langle \text{grad } f, N \rangle - f \langle \text{grad } \gamma_x, N \rangle d\sigma. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Das erste Integral auf der rechten Seite hängt nicht von r ab. Wir müssen also nur noch das zweite Integral berechnen. Hierfür folgern wir aus (i) und (ii) die einfachen Identitäten:

$$\begin{aligned} \Gamma_x(y) &= \frac{1}{4\pi r} & (*) \\ \text{grad } \Gamma_x(y) &= \frac{-(y-x)}{4\pi r^3} = \frac{N}{4\pi r^2} & (**) \end{aligned}$$

für $y \in \partial \mathbb{B}_r^3(x) = \mathbb{S}_r^2(x)$. Somit rechnen wir unter Anwendung des Transformationssatzes nach, dass

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}_r^2(x)} \Gamma_x \langle \text{grad } f, N \rangle d\sigma &= r^2 \int_{\mathbb{S}_1^2(0)} (\Gamma_x \langle \text{grad } f, N \rangle)(x+r\xi) d\sigma(\xi) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{r}{4\pi} \int_{\mathbb{S}_1^2(0)} \langle \text{grad } f, N \rangle(x+r\xi) d\sigma(\xi). \end{aligned}$$

Da $\langle \text{grad } f, N \rangle \leq \|\text{grad } f\| < \infty$ folgt, dass dieses Integral gegen 0 strebt, wenn $r \rightarrow 0$. Analog berechnen wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}_r^2(x)} f \langle \text{grad } \Gamma_x, N \rangle d\sigma &= r^2 \int_{\mathbb{S}_1^2(0)} (f \langle \text{grad } \Gamma_x, N \rangle)(x+r\xi) d\sigma(\xi) \\ &\stackrel{(**)}{=} \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}_1^2(0)} f(x+r\xi) d\sigma(\xi). \end{aligned}$$

Aus der Leibniz-Regel für Parameterintegrale (Satz 1.9) und der Tatsache, dass $\int_{\mathbb{S}_1^2(0)} \mathbf{1} d\sigma = 4\pi$ ist, folgt nun, dass dieses Integral gegen $f(x)$ strebt, wenn $r \rightarrow 0$. Umstellen der Gleichung (2.9) nach $f(x)$ ergibt das gewünschte Ergebnis. \square

Die Funktion Γ heißt **Fundamentallösung** des Laplace-Operators. Weiterhin ist Gleichung (2.8) als **Green'sche Darstellungsformel** bekannt. Wie das folgende Beispiel zeigen wird, übernimmt die Fundamentallösung die mathematische Rolle von dem, was in der Physik gelegentlich als „ δ -Dirac Funktion“ bezeichnet wird (ein Begriff, der allerdings einigen theoretischen Erklärungsbedarf aufweist).

Beispiel 2.14. Sei $p_1, \dots, p_s \in \mathbb{R}^3$ eine endliche Ladungsverteilung mit Punktladungen $Q_1, \dots, Q_s \in \mathbb{R}$. Wir definieren das elektrische Potential

$$\Phi(x) := \sum_{i=1}^s -Q_i \Gamma_{p_i}(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^s \frac{-Q_i}{\|x - p_i\|}$$

für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{p_1, \dots, p_s\}$. Das elektrische Feld ist nun $E(x) := \text{grad } \Phi$ und es folgt direkt aus dem vorangegangenen Satz 2.26, dass $\Delta \Phi = \text{div } E = 0$. Für eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^3$ wie im Satz 2.26 mit $p_i \in \text{int } M$ für $i = 1, \dots, s$ folgt dann aus der Green'schen Darstellungsformel, dass

$$\int_{\partial M} \langle E, N \rangle d\sigma = \sum_{i=1}^s Q_i.$$

Diese Beobachtung lässt sich auf „kontinuierliche Ladungsdichten“ ausweiten. Der Beweis beruht im Wesentlichen darauf, dass die Reihenfolge von Laplace-Operator und Integration vertauscht wird. Ich gehe an dieser Stelle aber nicht weiter auf die Details ein und gebe nur das Resultat an.

Satz 2.27. Ist $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zu $\overline{\mathbb{B}_1^3(0)}$ diffeomorphe C^2 -Untermannigfaltigkeit und $N: \partial M \rightarrow \mathbb{R}^3$ das äußere Einheitsnormalenfeld. Für $f \in C^1(M)$ und $\Phi(x) := \int_M \Gamma_x(y) f(y) dy$ ist

- (i) für alle $x \notin M$ ist $\Delta \Phi(x) = 0$,
- (ii) für alle $x \in M$ ist $\Delta \Phi(x) = f(x)$.

2.4.6 Helmholtz-Zerlegung

In diesem letzten Abschnitt zur Vektoranalysis wollen wir noch einen Blick auf Vektorfelder werfen, die kein Potential besitzen. Eine interessante Frage ist:

Vorlesung 18
(12.12.24)

Können wir Vektorfelder ohne Potential in „einfachere“ Vektorfelder zerlegen?

Zuerst sollten wir natürlich klären, welche Vektorfelder „einfach“ sein sollen. Eine Option haben wir bereits kennen gelernt: Potentialfelder, bzw. etwas allgemeiner rotationsfreie Felder. Da wir mit der Divergenz auch noch einen weiteren Differentialoperator angeschaut haben, ergibt sich sogleich auch noch ein zweiter Kandidat: **divergenzfreie** Vektorfelder, d.h., Vektorfelder Y mit $\text{div}(Y) = 0$. Der folgende Satz, den wir als Anwendung unserer Betrachtung von Randwertproblemen sehen können, zeigt das Zerlegen in solche Vektorfelder tatsächlich existieren.

Satz 2.28 — Helmholtz-Zerlegung. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine C^2 -Untermannigfaltigkeit mit äußerem Einheitsnormalenfeld $N: \partial M \rightarrow \mathbb{R}^3$, die diffeomorph zu $\overline{\mathbb{B}_1^3(0)}$ ist. Sei $Y: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein C^1 -Vektorfeld, dann gibt es eine eindeutige Zerlegung

$$Y = X + \text{grad } \Phi,$$

wobei das C^1 -Vektorfeld $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ divergenzfrei und parallel zu ∂M ist, d.h., $\langle X, N \rangle = 0$, und die C^2 -Funktion $\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}$ eindeutig bis auf eine additive Konstante bestimmt ist.

Beweis.

- Existenz: Um die Existenz zu beweisen, beobachten wir zuerst, dass falls eine solche Zerlegung $Y = X + \text{grad } \Phi$ existiert, aus den Bedingungen an X folgt, dass

$$\text{div}(Y) = \text{div}(\text{grad } \Phi) = \Delta \Phi \quad \text{und} \quad \langle Y, N \rangle = \langle \text{grad } \Phi, N \rangle.$$

Wir betrachten also das folgende Neumann-Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta \Phi = \text{div}(Y) & \text{in int}(M), \\ \langle \text{grad } \Phi - Y, N \rangle = 0 & \text{auf } \partial M. \end{cases}$$

Satz 2.25 garantiert, dass für dieses Problem eine, bis auf eine additive Konstante eindeutige, Lösung $\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}$ existiert. Definieren wir nun mithilfe dieser Lösung das Vektorfeld $X := Y - \text{grad } \Phi$, dann rechnen wir einfach nach (*Übung!*), dass X wirklich divergenzfrei und parallel zu ∂M ist.

- Eindeutigkeit: Angenommen $Y = X + \text{grad } \Phi$ ist eine solche Zerlegung. Wir zeigen zuerst, dass

$$\int_M \langle X, \text{grad } \Phi \rangle \, dx \, dy \, dz = 0 \quad (2.10)$$

gilt. In der Tat folgt aus Lemma 2.16 und der Divergenzfreiheit von X , dass $\text{div}(\Phi X) = \langle X, \text{grad } \Phi \rangle$. Somit folgt aus dem Divergenzansatz von Gauß (Satz 2.16) und der Parallelität von X zum Rand ∂M , dass

$$\int_M \langle X, \text{grad } \Phi \rangle \, dx \, dy \, dz = \int_M \text{div}(\Phi X) \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial M} \langle \Phi X, N \rangle \, d\sigma = 0.$$

Nehmen wir nun an, dass $Y = X + \text{grad } \Phi = \tilde{X} + \text{grad } \tilde{\Phi}$. Dann gilt natürlich

$$0 = X - \tilde{X} + \text{grad}(\Phi - \tilde{\Phi}). \quad (2.11)$$

Integrieren wir das Skalarprodukt von diesem Ausdruck mit $X - \tilde{X}$ über M , dann folgt aus unsere obigen Betrachtung (2.10), dass

$$0 = \int_M \|X - \tilde{X}\|^2 + \langle X - \tilde{X}, \text{grad}(\Phi - \tilde{\Phi}) \rangle \, dx \, dy \, dz = \int_M \|X - \tilde{X}\|^2 \, dx \, dy \, dz.$$

Da $\|X - \tilde{X}\|^2$ nicht-negativ und stetig ist, folgt $X = \tilde{X}$. Somit reduziert sich Gleichung (2.11) zu $0 = \text{grad}(\Phi - \tilde{\Phi})$, woraus sogleich $\Phi = \tilde{\Phi} + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ folgt. \square

~ 3 ~

Gewöhnliche Differentialgleichungen

3.1 Einführende Betrachtungen

3.1.1 Grundbegriffe

Notation. Wir werden im folgenden Kurven im \mathbb{R}^n , d.h., Funktionen $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ für ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$, suchen, die gewissen Gleichungen genügen. Die Variable $t \in I$ kann dabei als „Zeit“ interpretiert werden und die Variable $x \in \mathbb{R}^n$ als „Ort“. Es ist hierbei in der Theorie der Differentialgleichungen üblich sowohl die Kurve, als auch die Orts-Variable mit dem gleichen Symbol zu notieren. Gerade am Anfang kann es nützlich sein, sich gelegentlich zu vergewissern, über welches Objekt wir sprechen. Für die Ableitungen der Kurve schreiben wir

$$\frac{d}{dt}y = y', \quad \frac{d^2}{dt^2}y = y'', \quad \dots, \quad \frac{d^d}{dt^d}y = y^{(d)}.$$

Implizite Form. Bei einer **gewöhnlichen Differentialgleichung in impliziter Form** wird eine Kurve $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ gesucht, die (zusammen mit ihren Ableitungen) die Gleichung

$$F(t, x, x', \dots, x^{(d)}) = 0$$

erfüllt. Diese Gleichung ist dabei so zu lesen, dass $F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(d)}(t)) = 0$ für alle $t \in I$ gilt. Hierbei ist $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^{n \cdot (d+1)+1}$. Insbesondere muss also $(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(d)}(t)) \in \Omega$ gelten, damit die obige Gleichung wohldefiniert ist.

Die Zahl der Ableitungen d , von der F abhängt, heißt **Ordnung** der Differentialgleichung. Ist F unabhängig von der Zeit-Variablen, d.h., $F(t, x, x', \dots, x^{(d)}) = G(x, x', \dots, x^{(d)})$ für alle $(t, x, x', \dots, x^{(d)}) \in \mathbb{R}^{n \cdot (d+1)+1}$, dann heißt die Differentialgleichung **autonom**.

Explizite Form. Bei einer **gewöhnlichen Differentialgleichung in expliziter Form** wird eine Kurve $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ gesucht, die (zusammen mit ihren Ableitungen) die Gleichung

$$x^{(d)} = f(t, x, x', \dots, x^{(d-1)})$$

erfüllt, wobei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion und $\Omega \subset \mathbb{R}^{n \cdot d+1}$ offen ist. Die Funktion f wird als **rechte Seite** bezeichnet. Eine Differentialgleichung in expliziter Form kann in eine Differentialgleichung in impliziter Form umgeschrieben werden. Die Begriffe **Ordnung** und **autonom** übertragen sich auf den expliziten Fall.

Beispiel 3.1. Die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$x' = x$$

ist explizit und autonom mit rechter Seite $f: \mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto x$. Die zugehörige implizite Form ist $x' - x = 0$ mit $F: \mathbb{R}^{2+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x, x') \mapsto x' - x$. Direktes Nachrechnen zeigt, dass Lösungen dieser Differentialgleichung durch $x(t) := ce^t$ mit $c \in \mathbb{R}$ gegeben sind. Wir werden später sehen, dass wir dadurch schon alle Lösungen gefunden haben.

Beispiel 3.2. Die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$x' = tx$$

ist explizit und nicht-autonom mit rechter Seite $f: \mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto tx$. Die zugehörige implizite Form ist $x' - tx = 0$ mit $F: \mathbb{R}^{2+1} \rightarrow \mathbb{R}, (t, x, x') \mapsto x' - tx$. Direktes Nachrechnen zeigt, dass Lösungen dieser Differentialgleichung durch $x(t) := ce^{t^2/2}$ mit $c \in \mathbb{R}$ gegeben sind. Wir werden später sehen, dass wir dadurch schon alle Lösungen gefunden haben.

Beispiel 3.3. Die bereits in Abschnitt 2.2.1 betrachtete Rotation eines „Teilchens“ $p: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ um eine bewegliche Achse $\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist durch die explizite Differentialgleichung

$$p' = \omega \times p$$

beschrieben. Die rechte Seite ist hier $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (t, p) \mapsto \omega(t) \times p$ welche wir als das Vektorfeld der „infinitesimalen Rotation“ identifizieren.

Aus dem letzten Beispiel ist physikalisch ersichtlich, dass im Allgemeinen eine Differentialgleichung keine eindeutige Lösung besitzt. Sie sollte vielmehr noch von einem *Anfangswert*, hier z.B. dem Startpunkt der Rotation, abhängen. Das zugehörige Problem

$$\begin{cases} x' = f(t, x, x', \dots, x^{(d)}), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

wird *Anfangswertproblem* genannt, wobei $t_0 \in I$ und $(t_0, x_0) \in \Omega$.

3.1.2 Systeme von Differentialgleichungen

Die folgenden Beobachtungen werden uns gelegentlich helfen Differentialgleichungen in eine einfachere Form zu bringen. Das wird uns ermöglichen die Notation in unseren nachfolgenden Sätzen zu vereinfachen.

Beobachtung 1. Eine Differentialgleichung

$$x^{(d)} = f(t, x, \dots, x^{(d-1)})$$

der Ordnung d im \mathbb{R}^n lässt sich als eine Differentialgleichung 1. Ordnung im \mathbb{R}^{n-d} schreiben: Wir führen die neuen Variablen

$$\begin{cases} y_0 = x \\ y_1 = x' \\ y_2 = x'' \\ \vdots \\ y_{d-1} = x^{(d-1)} \end{cases} \quad \text{ein. Damit ist} \quad \begin{cases} y'_0 = x = y_1 \\ y'_1 = x'' = y_2 \\ \vdots \\ y'_{d-2} = x^{(d-1)} = y_{d-1} \\ y'_{d-1} = x^{(d)} = f(t, y_0, \dots, y_{d-1}) \end{cases}$$

Also genügt der Vektor $Y = (y_0, \dots, y_{d-1}) \in \mathbb{R}^{n-d}$ der Gleichung

$$Y' = \begin{pmatrix} y'_0 \\ \vdots \\ y'_{d-1} \end{pmatrix} = F(t, Y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{d-1} \\ f(t, y_0, \dots, y_{d-1}) \end{pmatrix}.$$

Beobachtung 2. Eine nicht-autonome Differentialgleichung

$$x' = f(t, x)$$

1. Ordnung im \mathbb{R}^n kann man als eine autonome Differentialgleichung 1. Ordnung im \mathbb{R}^{n+1} umgeschrieben werden: Wir führen die neuen Variablen

$$\begin{cases} y_0 = t \\ y_1 = x_1 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases} \quad \text{ein. Damit ist} \quad \begin{cases} y'_0 = \frac{d}{dt}t = 1 \\ y'_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) = f(x_0, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y'_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) = f(x_0, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Also genügt der Vektor $Y = (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ der Gleichung

$$Y' = \begin{pmatrix} y'_0 \\ y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = F(Y) = \begin{pmatrix} 1 \\ f_1(Y) \\ \vdots \\ f_n(Y) \end{pmatrix}.$$

3.1.3 Trennung der Veränderlichen

Im Allgemeinen lassen sich nur schwer explizit Lösungen für Anfangswertprobleme finden. Wir werden jetzt ein Beispiel besprechen bei dem dies möglich ist. Seien $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf offenen Intervallen $I, U \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ und $x_0 \in U$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

Vorlesung 19
(17.12.24)

$$\begin{cases} x' = g(t) \cdot f(x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Die zugehörige Differentialgleichung 1. Ordnung heißt **separierbar** beziehungsweise mit *getrennten Variablen*.

Definition 3.1. Ein Anfangswertproblem heißt **eindeutig lösbar**, wenn für je zwei Lösungen $x_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ immer $x_1(t) = x_2(t)$ für alle $t \in I_1 \cap I_2$ folgt.

Satz 3.1 — Trennung der Veränderlichen. Ist $f(x_0) \neq 0$, so existiert ein offenes Intervall $I_0 \subset I$ mit $t_0 \in I_0$ und eine eindeutige Lösung $x: I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems (3.1), die aus der Formel

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f(\eta)} d\eta = \int_{t_0}^t g(\xi) d\xi$$

durch umstellen nach $x(t)$ gewonnen werden kann.

Ist $f(x_0) = 0$, dann ist $x(t) = x_0$ eine Lösung, die aber nicht eindeutig sein muss.

Anmerkung 3.1 — Merkgel. Statt diesen Satz auswendig zu lernen, ist es empfehlenswert ihn sich als „Rezept“ zu merken, das einem hilft separierte Differentialgleichungen zu lösen. Hierfür ist es nützlich die Leibniz-Notation zu verwenden und so zu tun, als ob wir mit Differentialen ganz

normal rechnen könnten:

$$\begin{array}{ccc}
 x' = \frac{dx}{dt} = g(t) \cdot f(x) & \xrightarrow{\substack{\text{teilen durch } f(x) \\ \text{mult. von } dt}} & \frac{1}{f(x)} dx = g(t) dt \\
 & \xrightarrow{\text{integrieren}} & \int \frac{1}{f(x)} dx = \int g(t) dt
 \end{array}$$

Die Integrationskonstanten ergeben sich, durch einsetzen der Anfangswerte. Natürlich ist diese Herangehensweise kein Beweis, sondern lediglich eine Merkhilfe. Doch der nachfolgende tatsächliche Beweis wird dieses Vorgehen legitimieren.

Beweis „Trennung der Veränderlichen“. Die Aussagen für $f(x_0) = 0$ folgen durch direktes Nachrechnen und Beispiel 3.4.

Nehmen wir nun $f(x_0) \neq 0$ an. Aus der Stetigkeit von f folgt dann, dass eine offene Umgebung $V \subset U$ von x_0 existiert, sodass $f|_V \neq 0$. Somit können wir

$$\begin{aligned}
 F: V &\rightarrow \mathbb{R}, & F(x) &:= \int_{x_0}^x \frac{1}{f(\eta)} d\eta \\
 G: I &\rightarrow \mathbb{R}, & G(t) &:= \int_{t_0}^t g(\xi) d\xi
 \end{aligned}$$

definieren. Da $F' = 1/f$ und deshalb, nach Konstruktion, auf V festes Vorzeichen hat, folgt, dass F streng monoton ist. Somit besitzt F eine C^1 -Umkehrfunktion $F^{-1}: F(V) \rightarrow V$. Weiterhin folgt aus $G(t_0) = 0 \in F(V)$ und der Stetigkeit von G , dass ein offenes Intervall $I_0 \subset I$ mit $t_0 \in I_0$ und $G(I_0) \subset F(V)$ existiert. Somit können wir

$$x: I_0 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x(t) := F^{-1}(G(t))$$

als mögliche Lösung des Anfangswertproblems (3.1) definieren. Wir rechnen nach, dass dieser Kandidat tatsächlich eine Lösung ist:

- Es gilt

$$x(t_0) = F^{-1}(G(t_0)) = F^{-1}(0) = x_0.$$

Somit erfüllt x die Anfangswertbedingung.

- Aus der Produktregel folgt, dass $F'(x)x'(t) = G'(t)$. Durch einsetzen der Definition und umstellen folgt, dass x der Differentialgleichung genügt. \square

Beispiel 3.4. Wir betrachten für ein $c > 0$ und $x_0 > 0$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = -2c\sqrt{|x|}, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Wir rechnen nach, dass

$$x_{t_0}(t) := \begin{cases} (\sqrt{x_0} + c(t - t_0))^2, & t \leq \frac{\sqrt{x_0} + ct_0}{c}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine C^1 -Abbildung auf ganz \mathbb{R} ist und somit das Anfangswertproblem löst. Dann hat aber das

Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = -2c\sqrt{|x|}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

unendlich viele Lösungen, nämlich alle x_{t_0} mit $t_0 < 0$. In [FK11, S. 274] wird motiviert, dass diese Differentialgleichung den Wasserstand in einem zylindrischen Becher modelliert, aus dem Wasser durch ein Loch abfließt. Es ist physikalisch einleuchtend, dass wir die Vergangenheit (Füllstand) eines leeren Bechers mit Loch nicht eindeutig rekonstruieren können.

3.2 Eigenschaften der Lösung eines Anfangswertproblems

3.2.1 Lokale Existenz: Satz von Picard–Lindelöf

Das vorangegangene Beispiel 3.4 zeigt, dass Stetigkeit der rechten Seite alleine nicht für die Eindeutigkeit eines Anfangswertproblems reicht. Wir benötigen deshalb eine weitere Bedingung — der Differenzenquotient der x -Variable soll (lokal) beschränkt sein.

Vorlesung 20
(19.12.24)

Definition 3.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Eine Abbildung $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ erfüllt eine **lokale Lipschitz-Bedingung** bzgl. x , wenn es zu jedem $(t_0, x_0) \in \Omega$ eine offene Umgebung $\Omega_0 \subset \Omega$ und ein $L > 0$ gibt, sodass für alle $(t, x_1), (t, x_2) \in \Omega_0$

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|.$$

Die Konstante L heißt **Lipschitz-Konstante**. Ist L unabhängig von (t_0, x_0) , d.h. $\Omega_0 = \Omega$, dann erfüllt f eine **globale Lipschitz-Bedingung**.

Das folgende Lemma stellt den Zusammenhang zwischen der Lipschitz-Bedingung und Differenzierbarkeit her. Es gibt uns die Möglichkeit für stetig differenzierbare Funktionen die Lipschitz-Konstante mithilfe der Ableitung auszudrücken.

Lemma 3.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen. Ist $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ partiell stetig differenzierbar nach x , d.h., die Ableitung

$$\partial_x f(t_0, x_0) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \partial_{x_1} f & \cdots & \partial_{x_n} f \\ | & & | \end{pmatrix} (t_0, x_0)$$

existiert und ist stetig für alle $(t_0, x_0) \in \Omega$, dann erfüllt f eine lokal Lipschitz-Bedingung bzgl. x .

Beweis. Da Ω offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$, sodass

$$\{(t, x) : |t - t_0| \leq \epsilon, \|x - x_0\| \leq \epsilon\} =: K \subset \Omega.$$

Die Menge K ist nach Konstruktion kompakt. Somit existiert $L := \max_{(t,x) \in K} \|\partial_x f(t, x)\|$. Weiterhin ist K konvex, sodass aus dem Mittelwertsatz

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| = \left\| \int_0^1 \partial_x f(t, sx_1 + (1-s)x_2) \cdot (x_1 - x_2) \, ds \right\| \leq L \|x_1 - x_2\|$$

für alle $(t, x_1), (t, x_2) \in K$ folgt. □

Beispiel 3.5. Sei $n = 1$ und $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

- Die Funktion $f(t, x) = x$ erfüllt eine globale Lipschitz-Bedingung mit $L = 1$.
- Die Funktion $f(t, x) = x^2$ erfüllt eine lokale Lipschitz-Bedingung.
- Die Funktion $f(t, x) = \sqrt{|x|}$ erfüllt keine Lipschitz-Bedingung (auch nicht lokal) bei $(t, x_0) = (t, 0)$.

Wir werden nun mithilfe dieser Vorbetrachtung einen berühmten Satz über die Existenz von Lösungen von Differentialgleichungen 1. Ordnung beweisen können. Der Beweis ist eine Anwendung von einem anderen berühmten Satz — dem Banachschen Fixpunktsatz — den ihr schon aus der *MfP2* kennt. Ich zitiere ihn hier noch einmal, damit wir hin vor Augen haben.

Satz 3.2 — Banachscher Fixpunktsatz. Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $X \neq \emptyset$, und $f: X \rightarrow X$ eine q -Kontraktion, d.h., für alle $x, y \in X$ gilt $d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y)$ und $q \in (0, 1)$.

- (i) Es existiert genau ein Fixpunkt $x \in X$ von f , d.h., $f(x) = x$.
- (ii) Für beliebiges $y \in X$ ist der Fixpunkt gegeben durch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x.$$

Satz 3.3 — lokale Existenz nach Picard–Lindelöf. Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen sowie $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, die eine lokale Lipschitz-Bedingung bzgl. x erfüllt. Dann gibt es zu jedem $(t_0, x_0) \in \Omega$ ein $\epsilon > 0$, sodass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

eine Lösung auf $I := (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ besitzt.

Beweis. Wir wollen den Satz von Picard–Lindelöf mithilfe des Banachschen Fixpunktsatzes beweisen. Der Beweis verläuft in mehreren Schritten.

Schritt 1: Formulierung als Integralgleichung. Löst x das Anfangswertproblem (3.2), dann folgt durch Integration, dass

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds. \quad (3.3)$$

Umgekehrt ist jede stetige Lösung dieser Integralgleichung (3.3) nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung sogar stetig differenzierbar und somit eine Lösung des Anfangswertproblems (3.2). Die Integralgleichung (3.3) lässt sich mithilfe des Integraloperators

$$(\mathcal{P}_{(t_0, x_0)} x)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds$$

als Fixpunktgleichung $x = \mathcal{P}_{(t_0, x_0)} x$ schreiben.

Schritt 2: Der passende Raum für $\mathcal{P}_{(t_0, x_0)}$. Der Integraloperator $\mathcal{P}_{(t_0, x_0)}$ ist für stetige Funktionen sinnvoll. Wir müssen diesen Raum aber weiter einschränken, damit wir die Voraussetzungen für den Banachschen Fixpunktsatz zeigen können. Seien hierfür $a, b > 0$, sodass

$$K := \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\} \subset \Omega.$$

Da K kompakt ist, existiert $M := \max_{(t,x) \in K} \|f(t,x)\|$ und eine globale Lipschitz-Konstante $L > 0$ für ganz K . Wir wählen nun $0 < \epsilon < a$ mit $\epsilon M \leq b$ und $\epsilon L < 1$. Dann ist $I := (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset (t_0 - a, t_0 + a)$ und weiterhin

$$X_{a,b} := \{x \in C(I, \mathbb{R}^n) : x(t_0) = x_0, \|x(t) - x_0\| \leq b \forall t \in I\} \subset C(I, \mathbb{R}^n)$$

versehen mit der Supremumsmetrik $d_\infty(x, \tilde{x}) := \sup_{t \in I} \|x(t) - \tilde{x}(t)\|$ ein vollständiger metrischer Raum (vgl. MfP2).

Schritt 3: Anwendung Banachscher Fixpunktsatz. Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung zeigt, dass $\mathcal{P}_{(t_0,x_0)}x$ für alle $x \in X_{a,b}$ stetig ist. Es bleibt zu zeigen, dass der Integraloperator

$$\mathcal{P}_{(t_0,x_0)} : X_{a,b} \rightarrow C(I, \mathbb{R}^n), x \mapsto \mathcal{P}_{(t_0,x_0)}x$$

eine Selbstabbildung und Kontraktion ist:

- Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{P}_{(t_0,x_0)}(X_{a,b}) \subset X_{a,b}$ ist. Sei also $x \in X_{a,b}$. und für alle $t \in I$ gilt

$$\|(\mathcal{P}_{(t_0,x_0)}x)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right\| \leq \epsilon M < b.$$

- Schließlich ist zu zeigen, dass $\mathcal{P}_{(t_0,x_0)}$ eine Kontraktion ist. Seien hierfür $x_1, x_2 \in X_{a,b}$. Wir rechnen nach, dass

$$\begin{aligned} d_\infty(\mathcal{P}_{(t_0,x_0)}x_1, \mathcal{P}_{(t_0,x_0)}x_2) &= \sup_{t \in I} \left\| \int_{t_0}^t f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s)) ds \right\| \\ &\leq \sup_{t \in I} \int_{t_0}^t L \|x_1(s) - x_2(s)\| ds \\ &\leq \epsilon L \sup_{t \in I} \|x_1(t) - x_2(t)\| \\ &= \epsilon L d_\infty(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Dabei haben wir für die erste Abschätzung die Lipschitz-Bedingung und jeweils die Monotonie des Integrals ausgenutzt ($|t_0 - t|$ ist immer $< \epsilon$ für $t \in I$). Somit ist $\mathcal{P}_{(t_0,x_0)}$ eine q -Kontraktion mit $q = \epsilon L < 1$. \square

Die Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes gibt uns auch gleich eine Möglichkeit Lösungen des Anfangswertproblems zu approximieren.

Vorlesung 21
(07.01.25)

Korollar 3.1 — Picard-Iteration. Unter den gleichen Voraussetzungen wie im Satz von Picard-Lindelöf konvergiert die über I definierte Funktionenfolge

$$\begin{aligned} x^{(0)}(t) &\equiv x_0, \\ x^{(n+1)}(t) &:= (\mathcal{P}_{(t_0,x_0)}x^{(n)})(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x^{(n)}(s)) ds \end{aligned}$$

gleichmäßig gegen die Lösung des Anfangswertproblems (3.2), d.h., $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = x \in X_{a,b}$ löst (3.2).

Beispiel 3.6. Wir betrachten das Anfangswertproblem $x' = x$ mit $x(0) = 1$. Wir wissen, dass die Lösung durch $t \mapsto e^t$ gegeben ist, wollen dies aber noch einmal mithilfe der Picard-Iteration überprüfen. Wir rechnen nach, dass

$$\begin{aligned} x^{(0)}(t) &\equiv 1 \\ x^{(1)}(t) &= 1 + \int_0^t 1 \, ds = 1 + t \\ x^{(2)}(t) &= 1 + \int_0^t 1 + s \, ds = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 \\ &\vdots \\ x^{(n)}(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}. \end{aligned}$$

Somit folgt, dass $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} = e^t$.

3.2.2 Lemma von Gronwall und globale Eindeutigkeit

Der Satz von Picard–Lindelöf garantiert uns nur die Eindeutigkeit der Lösung solange sie im Raum $X_{a,b}$ bleibt. Was passiert im „Großen“? Um diese Frage zu beantworten, benötigen wir eine berühmte Differentialgleichung.

Satz 3.4 — Lemma von Gronwall. Seien $w, a, b: [t_0, t_0 + c] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $b \geq 0$, sodass

$$w(t) \leq a(t) + \int_{t_0}^t b(s)w(s) \, ds.$$

für alle $t \in [t_0, t_0 + c]$. Dann gilt sogar

$$w(t) \leq a(t) + \int_{t_0}^t a(s) b(s) e^{\int_s^t b(\tau) \, d\tau} \, ds.$$

Beweis. Wir definieren $y(t) := \int_{t_0}^t b(s)w(s) \, ds$. Dann ist die Behauptung äquivalent zu

$$y(t) \leq \int_{t_0}^t a(s) b(s) e^{\int_s^t b(\tau) \, d\tau} \, ds.$$

Aus der Voraussetzung folgt, dass $w(t) - y(t) \leq a(t)$. Multiplizieren wir beide Seiten mit der nicht negativen Funktion b , dann folgt aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung, dass

$$a(t)b(t) \geq b(t)w(t) - b(t)y(t) = y'(t) - b(t)y(t).$$

Analog folgt nach Multiplikation von $\exp\left(\int_{t_0}^t b(\tau) \, d\tau\right)$ aus der Kettenregel, dass

$$a(t) b(t) e^{\int_{t_0}^t b(\tau) \, d\tau} \geq y'(t) e^{\int_s^t b(\tau) \, d\tau} - b(t) y(t) e^{\int_{t_0}^t b(\tau) \, d\tau} = \frac{d}{dt} \left(y(t) e^{\int_{t_0}^t b(\tau) \, d\tau} \right).$$

Integrieren und nach $y(t)$ Umstellen ergibt das Resultat. □

Anmerkung 3.2. Einige wichtige Spezialfälle der Gronwallschen Ungleichung sind:

- Sind $a(t) \equiv A$ und $b(t) \equiv B$ konstant, dann gilt

$$w(t) \leq A + B \int_{t_0}^t w(s) \, ds \quad \Rightarrow \quad w(t) \leq A e^{B(t-t_0)}.$$

- Ist $w \geq 0$ und $a(t) \equiv 0$, dann gilt

$$w(t) \leq \int_{t_0}^t b(s)w(s) \, ds \quad \Rightarrow \quad w(t) \equiv 0.$$

Unter den gleichen Voraussetzungen wie beim Satz von Picard–Lindelöf können wir nun auch die globale Eindeutigkeit beweisen.

Satz 3.5 — Eindeutigkeit der Lösung. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung bzgl. x . Seien $x, \tilde{x}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösungen der Differentialgleichung $x' = f(t, x)$, die für ein $t_0 \in I$ übereinstimmen, d.h. $x(t_0) = \tilde{x}(t_0)$. Dann stimmen sie auf ganz I überein.

Beweis. Sei $c > 0$, sodass $[t_0, t_0 + c] \subset I$. Dann besitzen x und \tilde{x} eine gemeinsame Lipschitz-Konstante $L > 0$ auf dem kompakten Intervall $[t_0, t_0 + c]$. Wir betrachten $w(t) := \|x(t) - \tilde{x}(t)\|$ für $t \in [t_0, t_0 + c]$. Es gilt

$$\begin{aligned} w(t) &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) - f(s, \tilde{x}(s)) \, ds \right\| \\ &\leq L \int_{t_0}^t \|x(s) - \tilde{x}(s)\| \, ds \\ &= L \int_{t_0}^t w(s) \, ds. \end{aligned}$$

Mithilfe des Lemmas von Gronwall folgt nun, dass $w(t) \equiv 0$ auf $[t_0, t_0 + c]$ gilt. Der Beweis für $[t_0 - c, t_0]$ verläuft analog. (Tipp: Nutzt die Substitution $\varphi: [0, c] \ni t \mapsto t_0 - t$.) \square

3.2.3 Fortsetzbarkeit und Lebensdauer von Lösungen

Definition 3.3. Eine Lösung $x: (t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $x' = f(t, x)$ heißt nach **rechts bzw. links fortsetzbar**, falls es eine Lösung $\tilde{x}: (\tilde{t}_0, \tilde{t}_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt mit $(t_0, t_1) \subset (\tilde{t}_0, \tilde{t}_1)$ und $\tilde{t}_0 < t_0$ bzw. $t_1 < \tilde{t}_1$, sodass

$$\tilde{x}|_{(t_0, t_1)} = x.$$

Die Lösung heißt **maximal**, wenn sie keine (rechts/links) Fortsetzung besitzt.

Lemma 3.2. Eine Lösung $x: (t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $x' = f(t, x)$, wobei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Voraussetzungen des Satzes von Picard–Lindelöf erfüllt, ist genau dann nach rechts fortsetzbar, wenn der Grenzwert

$$x_1 := \lim_{t \uparrow t_1} x(t)$$

existiert und $(t_1, x_1) \in \Omega$.

Beweis. Sei $x^{(1)} : (t_1 - \delta, t_2 - \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, die (eindeutige) Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_1) = x_1. \end{cases}$$

Wir betrachten die Funktion

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t) & , t_0 \leq t < t_1, \\ x^{(1)}(t) & , t_1 \leq t < t_1 + \delta. \end{cases}$$

Sei $t^* \in (t_0, t_1)$ und $x^* := x(t^*)$. Die Funktion \tilde{x} ist genau dann eine Fortsetzung von x , wenn sie die Integralgleichung

$$\tilde{x}(t) = x^* + \int_{t^*}^t f(s, \tilde{x}(s)) \, ds = (\mathcal{P}_{(t^*, x^*)} \tilde{x})(t)$$

für alle $t \in (t_0, t_1 + \delta)$ erfüllt. Tatsächlich gilt

- für $t_0 < t < t_1$:

$$(\mathcal{P}_{(t^*, x^*)} \tilde{x})(t) = x^* + \int_{t^*}^t f(s, x(s)) \, ds = (\mathcal{P}_{(t^*, x^*)} x)(t) = x(t);$$

- für $t_1 \leq t < t_1 + \delta$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_{(t^*, x^*)} \tilde{x})(t) &= x^* + \int_{t^*}^{t_1} f(s, x(s)) \, ds + \int_{t_1}^t f(s, x^{(1)}(s)) \, ds \\ &= (\mathcal{P}_{(t^*, x^*)} x)(t_1) + \int_{t_1}^t f(s, x^{(1)}(s)) \, ds \\ &= x_1 + \int_{t_1}^t f(s, x^{(1)}(s)) \, ds \\ &= (\mathcal{P}_{(t_1, x_1)} x^{(1)})(t) \\ &= x^{(1)}(t) \end{aligned} \quad \square$$

Dieses Lemma lässt sich auch ganz analog für Fortsetzbarkeit nach Links beweisen (*Übung!*). Hieraus ergibt sich direkt die folgende Charakterisierung von Maximalen Lösungen eines Anfangswertproblems.

Satz 3.6 — Maximale Lösungen. Erfüllt $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Voraussetzungen des Satzes von Picard–Lindelöf, dann besitzt die Differentialgleichung $x' = f(t, x)$ für jedes $(t_0, x_0) \in \Omega$

- eine eindeutige maximale Lösung $x_{(t_0, x_0)} : I_{(t_0, x_0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$;
- das maximale Lösungsintervall $I_{(t_0, x_0)}$ ist offen.

Genauer gilt für $I_{(t_0, x_0)} = (t_-, t_+)$, dass

- entweder $t_+ = \infty$,
- oder $t_+ < \infty$ und zu jedem Kompaktum $K \subset \Omega$ gibt es ein $\tau < t_+$, sodass $(t, x(t)) \notin K$ für alle $t \in (\tau, t_+)$.

Analoges gilt für t_- .

Eine weitere wichtige Frage betrifft die Größe des maximalen Lösungsintervalls (die maximale „Lebensdauer“). Ohne weitere Einschränkungen ist eine Aussage schwierig. Wir betrachten die folgende wichtige Klasse von Funktionen.

Definition 3.4. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine Funktion $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **linear-beschränkt**, falls es stetige positive Funktionen $\alpha, \beta: I \rightarrow \mathbb{R}_+$ gibt, sodass

$$\|f(t, x)\| \leq \alpha(t)\|x\| + \beta(t)$$

für alle $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^n$ gilt.

Satz 3.7 — Maximale Lebensdauer. Es sei $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, linear beschränkt und erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung bzgl. x . Dann ist jede maximale Lösung der Differentialgleichung $x' = f(t, x)$ auf ganz I definiert, d.h., $I_{(t_0, x_0)} = I$ für alle Anfangswerte $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$.

Beweis. Sei $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Wir müssen zeigen, dass für alle $t_-, t_+ \in I$ mit $t_- < t_0 < t_+$ auch $t_-, t_+ \in I_{(t_0, x_0)}$ gilt. Im Folgenden werden wir nur t_+ betrachten, da der Fall t_- analog gezeigt werden kann. Für $t \in I_{(t_0, x_0)}$ mit $t > t_0$ schätzen wir nun ab, dass

$$\begin{aligned} \|x_{(t_0, x_0)}(t)\| &= \left\| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_{(t_0, x_0)}(s)) \, ds \right\| \\ &\leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t \underbrace{\|f(s, x_{(t_0, x_0)}(s))\|}_{\leq \alpha(s)\|x_{(t_0, x_0)}(s)\| + \beta(s)} \, ds \\ &\leq \underbrace{\|x_0\| + \int_{t_0}^t \beta(s) \, ds}_{=: A(t)} + \underbrace{\max_{t_0 < s < t} \alpha(s)}_{=: B(t)} \int_{t_0}^t \|x_{(t_0, x_0)}(s)\| \, ds \end{aligned}$$

Wir beobachten, dass $A(t)$ und $B(t)$ monoton wachsend sind und auf ganz $[t_0, t_+]$ definiert sind. Mithilfe der Gronwallschen Ungleichung folgt nun, dass

$$\|x(t)\| \leq A(t_+) \exp(B(t_+)(t_+ - t_0)) =: C(t_+)$$

für alle $t \in [t_0, t_+] \cap I_{(t_0, x_0)}$ gilt. Somit bleiben alle $(t, x(t))$ in der kompakten Menge

$$\{(t, x) : t_0 \leq t \leq t_+, \|x\| \leq C(t_+)\} \subset I \times \mathbb{R}^n.$$

Also folgt aus Lemma 3.2, dass sich x über $[t_0, t_+] \cap I_{(t_0, x_0)}$ hinaus fortsetzen lässt. Damit muss aber $t_+ \in I_{(t_0, x_0)}$ sein, denn $I_{(t_0, x_0)}$ ist nach Definition das maximale Lösungsintervall. \square

3.3 Lineare Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt werden wir uns mit einer wichtigen speziellen Klasse von Differentialgleichungen befassen.

Definition 3.5. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Die gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{3.4}$$

mit stetigen $A: I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **lineare Differentialgleichung**. Ist $b(t) = 0$ für

alle $t \in I$, dann ist die Gleichung **homogen**. Anderenfalls nennen wir sie **inhomogen**.

Beispiel 3.7. Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 3x_2 + 2\cos^2 t \\ x_2' &= 3x_1 + x_2 + 2\sin^2 t. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Es kann in die Form (3.4) gebracht werden:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b(t) = \begin{pmatrix} 2\cos^2 t \\ 2\sin^2 t \end{pmatrix}.$$

Das zugehörige homogene System $x' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x$ hat die Lösungen

$$x_H(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

für beliebige $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Für das entsprechende Anfangswertproblem ergeben sich die Konstanten c_i dann passend zu den Anfangswerten zu wählen. In Abschnitt 3.3.1 werden wir sehen, dass wir hierdurch schon alle Lösungen beschrieben haben.

Weiterhin ist für das inhomogene System eine spezielle Lösung (auch: *partikuläre Lösung*) gegeben durch

$$x_P(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sin(2t) + \cos(2t) - 1 \\ -\sin(2t) - \cos(2t) - 1 \end{pmatrix}.$$

Wir werden in sehen, wie wir diese partikuläre Lösung mithilfe der Methode der *Variation der Konstanten* finden können.

Es folgt, dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3.5) gegeben ist durch:

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sin(2t) + \cos(2t) - 1 \\ -\sin(2t) - \cos(2t) - 1 \end{pmatrix}.$$

3.3.1 Fundamentallösungen und Variation der Konstanten

Satz 3.8 — Existenz, Eindeutigkeit & Lebensdauer. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. (Wichtiger Spezialfall: $I = \mathbb{R}$.) Sind $A: I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, so hat jedes Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

mit $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ genau eine auf ganz I definierte Lösung.

Beweis. Wenn wir zeigen können, dass die zugehörige rechte Seite $f(t, x) = A(t)x + b(t)$ linear beschränkt ist und eine lokale Lipschitz-Bedingung erfüllt, dann folgt die Aussage aus den Sätzen 3.3, 3.5 und 3.7.

- Lipschitz-Bedingung: Sei $I_0 \subset I$ ein kompaktes Intervall und $(t, x_1), (t, x_2) \in I_0 \times \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| = \|A(t)(x_1 - x_2)\| \leq \|A(t)\| \|x_1 - x_2\| \leq \underbrace{\sup_{t \in I_0} \|A(t)\|}_{=:L} \|x_1 - x_2\|.$$

- Lineare Beschränktheit: Kann leicht nachgerechnet werden (*Details: Übung!*) mit:

$$\alpha(t) := \|A(t)\| \quad \text{und} \quad \beta(t) := \|b(t)\|. \quad \square$$

Um die Eigenschaften der Lösungsmenge der linearen Differentialgleichung (3.4) charakterisieren zu können, führen wir den Differentialoperator

$$\mathcal{L}_A: C^1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(I, \mathbb{R}^n), \quad x \mapsto x' - A(t)x$$

ein. Direktes Nachrechnen zeigt, dass \mathcal{L}_A linear ist und ein $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ genau dann die zu (3.4) gehörige homogene Gleichung löst, wenn $x \in \ker \mathcal{L}_A$. (*Übung: Nachrechnen!*)

Satz 3.9 — Eigenschaften der Lösungsmenge.

- (i) Der Lösungsraum $\ker \mathcal{L}_A$ der zu der linearen Differentialgleichung (3.4) gehörigen homogenen Gleichung

$$x' = A(t)x$$

ist ein n -dimensional Vektorraum, d.h., $\dim(\ker \mathcal{L}_A) = n$. Insbesondere sind die Funktionen $x^{(1)}, \dots, x^{(n)} \in \ker \mathcal{L}_A$ genau dann linear unabhängig, wenn die Vektoren $x^{(1)}(t_0), \dots, x^{(n)}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ für ein beliebiges $t_0 \in I$ linear unabhängig sind.

- (ii) Der Lösungsraum der inhomogenen Gleichung

$$x' = A(t)x + b(t)$$

ist ein affiner Raum: Für zwei Lösungen x und \tilde{x} gilt stets $x - \tilde{x} \in \ker \mathcal{L}_A$.

Beweis. Wir beweisen nur die Aussage über die Dimension des Lösungsraums. (*Übung: Überlegt euch den Rest!*) Einziges nicht triviales Problem: Sind $x^{(1)}, \dots, x^{(n)} \in \ker \mathcal{L}_A$ sodass $x^{(1)}(t_0), \dots, x^{(n)}(t_0)$ für ein $t_0 \in I$ linear abhängig sind, dann gilt dies schon für alle $t \in I$. Seien also $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, sodass $c_1x^{(1)}(t_0) + \dots + c_nx^{(n)}(t_0) = 0$. Dann löst auch

$$x(t) := c_1x^{(1)}(t) + \dots + c_nx^{(n)}(t)$$

die homogene Differentialgleichung und es ist $x(t_0) = 0$. Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt dann aber sofort $x(t) \equiv 0$. □

Die Charakterisierung des Lösungsraums des inhomogen Problems zeigt uns, dass immer gilt:

$$\begin{array}{l} \text{allgemeine} \\ \text{inhomogene Lösung} \end{array} = \begin{array}{l} \text{partikuläre Lösung} \\ \end{array} + \begin{array}{l} \text{allgemeine} \\ \text{homogene Lösung} \end{array}$$

Wir werden uns jetzt erst mit den allgemeinen homogenen Lösungen beschäftigen und dann eine Methode diskutieren um partikuläre Lösungen zu finden.

Sei $x^{(1)}, \dots, x^{(n)} \in \ker \mathcal{L}_A$ eine Basis. Wir können diese vektorwertigen Funktionen als Spalten einer matrixwertigen Funktion $X: I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ auffassen. Diese genügt dann der (Matrix)-Differentialgleichung

$$X' = A(t)X. \tag{3.6}$$

Weiterhin folgt aus unserer Charakterisierung der Lösungsmenge, dass X für alle $t \in I$ stetig invertierbar ist. Allgemeiner nennen wir jede Lösung $X: I \rightarrow \text{GL}(n)$ der Gleichung (3.6) **Fundamentallösung** der homogenen linearen Differentialgleichung $x' = A(t)x$. Mithilfe einer Fundamentallösung können wir nun alle homogenen Lösungen charakterisieren.

Satz 3.10 — Allgemeine homogene Lösung.

- (i) Sei $t_0 \in I$ und $X_0: I \rightarrow \text{GL}(n)$ die Fundamentallösung mit $X_0(t_0) = I_n$. Dann ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x' = A(t)x, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

gegeben ist durch $x: t \mapsto X_0(t)x_0$.

- (ii) Zwei Fundamentallösungen unterscheiden sich immer nur um einen (konstanten) Basiswechsel des \mathbb{R}^n : Sind $X_1, X_2: I \rightarrow \text{GL}(n)$ zwei Fundamentallösungen der homogenen Gleichung $x' = A(t)x$, so existiert eine konstante Matrix $C \in \text{GL}(n)$, sodass

$$X_2(t) = X_1(t)C$$

für alle $t \in I$ gilt.

Beweis. Um (i) zu zeigen, genügt es zu beobachten, dass $x: t \mapsto X_0(t)x_0$ das Anfangswertproblem löst, und somit schon die eindeutige Lösung ist.

Für (ii) sei nun $t_0 \in I$. Wir behaupten, dass $C := X_1^{-1}(t_0)X_2(t_0)$ der gesuchte Basiswechsel ist. Tatsächlich ist auch $Y(t) = X_1(t)C$ eine Fundamentallösung und sowohl X_2 als auch Y lösen das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} X' = A(t)X, \\ X(t_0) = X_2(t_0). \end{cases}$$

Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt $X_2(t) \equiv Y(t)$. □

Um eine lineare Differentialgleichung vollständig zu lösen, reicht es also aus eine Fundamentallösung zu bestimmen. Für autonome Systeme, also lineare Differentialgleichungen mit *konstanten Koeffizienten*, können wir Fundamentallösungen (mehr oder weniger) explizit mit Methoden der linearen Algebra bestimmen. Darum wird es im folgenden Abschnitt 3.3.2 gehen. Davor werden wir uns aber noch anschauen wie wir partikuläre Lösungen finden können.

Vorlesung 23
(14.01.25)

Satz 3.11 — Variation der Konstanten. Sei $X: I \rightarrow \text{GL}(n)$ eine Fundamentallösung der homogenen Gleichung $x' = A(t)x$. Dann ist jede Lösung x der inhomogenen Gleichung

$$x' = A(t)x + b(t)$$

von der Form

$$x(t) = X(t)c(t) \tag{3.7}$$

mit $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Dabei löst die Funktion (3.7) genau dann die inhomogene Gleichung, wenn die Koeffizientenfunktion c der Differentialgleichung

$$c'(t) = X^{-1}(t)b(t) \tag{3.8}$$

genügen.

Beweis. Nehmen wir zuerst an, dass die Funktion (3.7) die inhomogene Gleichung löst. Wir rechnen nach, dass

$$\begin{aligned} b(t) = x'(t) - A(t)x(t) &= \frac{d}{dt}(X(t)c(t)) - A(t)X(t)c(t) \\ &= X'(t)c(t) + X(t)c'(t) - A(t)X(t)c(t) \\ &= A(t)X(t)c(t) + X(t)c'(t) - A(t)X(t)c(t) \\ &= X(t)c'(t). \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt, falls die Koeffizientenfunktion der Differentialgleichung (3.8) genügt, dass

$$\begin{aligned} x'(t) &= X'(t)c(t) + X(t)c'(t) \\ &= A(t)X(t)c(t) + X(t)X^{-1}(t)b(t) \\ &= A(t)x(t) + b(t) \end{aligned}$$

Sei nun x eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Wir wollen zeigen, dass dann x die Form (3.7) hat. Da $X(t)$ für alle $t \in I$ eine invertierbare Matrix ist, existiert eine Lösung $a \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ mit

$$X(t)a(t) = b(t).$$

Sei nun $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ die Stammfunktion von

$$c' = a(t) = X^{-1}(t)b(t)$$

mit $x(t_0) = X(t_0)c(t_0)$ für ein $t_0 \in I$. Dann folgt $x(t) = X(t)c(t)$ aus der Eindeutigkeit der Lösung. \square

Anmerkung 3.3. Dieser Beweis gibt uns die Möglichkeit eine „kompakte“ Formel für die Lösung eines Anfangswertproblem zu geben: Sei $X: I \rightarrow GL(n)$ die Fundamentallösung des homogenen Systems $x' = A(t)x$ mit $X(t_0) = I_n$. Dann ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

gegeben durch

$$x(t) = X(t) \left(x_0 + \int_{t_0}^t X^{-1}(s)b(s) ds \right).$$

Beispiel 3.8. Wir betrachten nun Beispiel 3.7 etwas genauer. Wie wir die Fundamentallösung

$$X: t \mapsto \begin{pmatrix} e^{4t} & e^{-2t} \\ e^{4t} & -e^{-2t} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

des homogenen Problems bestimmen werden wir uns im nächsten Abschnitt 3.3.2 genauer anschauen. Hier wollen wir nun eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems (3.5) mithilfe der Methode der *Variation der Konstanten* bestimmen. Wir betrachten also den Ansatz

$x_P(t) = X(t)c(t)$. Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{=A(t)} x(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \cos^2 t \\ 2 \sin^2 t \end{pmatrix}}_{=b(t)} &= x'_P(t) = X'(t)c(t) + X(t)c'(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{4t} & e^{-2t} \\ e^{4t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}}_{=X(t)} c(t) + X(t)c'(t). \end{aligned}$$

Durch Umstellen nach c' folgt nun

$$c'(t) = \begin{pmatrix} c'_1(t) \\ c'_2(t) \end{pmatrix} = X^{-1}(t)b(t) = -\frac{e^{-2t}}{2} \begin{pmatrix} -e^{-2t} & -e^{-2t} \\ -e^{4t} & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \cos^2 t \\ 2 \sin^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4t} \\ e^{2t} \cos(2t) \end{pmatrix},$$

wobei wir den Additionssatz für den Kosinus verwendet haben. Integrieren wir nun, so ist

$$c(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -e^{-4t} \\ (\sin(2t) + \cos(2t))e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Durch Einsetzen in unseren Ansatz erhalten wir, wie zuvor behauptet, die partikuläre Lösung

$$x_P(t) = \begin{pmatrix} e^{4t} & e^{-2t} \\ e^{4t} & -e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}e^{-4t} \\ \frac{1}{4}(\sin(2t) + \cos(2t))e^{2t} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sin(2t) + \cos(2t) - 1 \\ -\sin(2t) - \cos(2t) - 1 \end{pmatrix}.$$

3.3.2 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir werden uns nun mit homogenen linearen Differentialgleichungen beschäftigen, deren rechte Seite nicht von der Zeit abhängt, *d.h.*, wir betrachten Gleichungen der Form

$$x' = Ax,$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine *konstante* Matrix ist. Die rechte Seite $f(t, x) = Ax$ ist somit auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ definiert. Somit sind die maximalen Lösungen solcher Gleichungen immer auf ganz \mathbb{R} definiert (Satz 3.8). Im eindimensionalen Fall — also $A \in \mathbb{R}$ — wissen wir, dass die allgemeine Lösung durch $x: t \mapsto ce^{At}$ gegeben ist. Wir wollen diesen Ansatz auch im mehrdimensionalen verfolgen, müssen dafür aber zuerst klären was die **Matrix-Exponentialfunktion** ist.

Die Matrix-Exponentialfunktion. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reelle $(n \times n)$ -Matrix. Wir definieren das Matrixexponential $e^A = \exp(A)$ von A durch

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

dabei ist $A^0 := I_n$ und

$$A^n := \prod_{k=1}^n A = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{n\text{-mal}}.$$

Lemma 3.3 — Matrixexponentialfunktion. Sei $A \in \mathbb{R}^n$. Die Reihe

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

konvergiert absolut für jedes $t \in \mathbb{R}$ und gleichmäßig für alle t aus einem beliebigen kompakten Intervall $I \subset \mathbb{R}$.

Beweis. Wir betrachten für $N \geq 0$ die Partialsummen $S_N(At) := \sum_{k=0}^N \frac{t^k}{k!} A^k$. Es gilt die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|S_{N+n}(At) - S_N(At)\| &\leq \sum_{k=N+1}^{N+n} \frac{1}{k!} \|A\|^k |t|^k \\ &\leq \frac{(\|A\|^{N+1} |t|^{N+1})}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k \\ &= \frac{\|A\|^{N+1} |t|^{N+1}}{(N+1)!} e^{\|A\||t|}. \end{aligned}$$

Für festes t konvergiert die rechte Seite gegen 0 für $N \rightarrow \infty$. Somit konvergiert die Reihe absolut nach dem Cauchy-Kriterium. Weiterhin ist für festes N die rechte Seite eine stetige Funktion in t . Es folgt, dass die Partialsummen (als Funktion in t) gleichmäßig über jedem Kompaktum I gegen das Matrixexponential konvergieren. \square

Im Gegensatz zu reellen Zahlen, haben Matrizen die Eigenschaft, dass sie im Allgemeinen nicht *kommutieren*, d.h., die Multiplikationsreihenfolge ist im Allgemeinen nicht vertauschbar. Betrachtet z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Das führt dazu, dass im Allgemeinen die Rechenregeln, die wir für die reelle Exponentialfunktion kennen, nicht mehr im Matrixfall gelten. Dennoch gilt das Folgende

Lemma 3.4 — Rechenregeln für das Matrixexponential.

(i) Kommutieren $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, d.h. $AB = BA$, dann gilt:

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$

(ii) Für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$(e^{At})^{-1} = e^{-At}.$$

(iii) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{\lambda I_n} = e^\lambda I_n$$

Insbesondere gilt $e^{0_n} = I_n$ für die Nullmatrix $0_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist.

(iv) Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $S \in \text{GL}(n)$, sodass $A = SBS^{-1}$, dann gilt

$$e^A = S e^B S^{-1}.$$

Beweis. Aussagen (iii) und (iv) rechnen wir direkt nach (*Übung!*). Weiterhin folgt (ii) direkt aus (i), dann At und $-At$ kommutieren und somit gilt

$$e^{At} e^{-At} = e^{At - At} = e^{0_n} = I_n.$$

Es bleibt also (i) zu zeigen. Tatsächlich folgt aus der Vertauschbarkeit von A und B und der absoluten Konvergenz, dass

$$e^A e^B = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{m=0}^k \frac{k!}{m!(k-m)!} A^m B^{k-m} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k.$$

Wer lieber die Details nachprüfen möchte betrachtet die Differenz der Partialsummen und rechnet nach, dass

$$\begin{aligned} S_N(A)S_N(B) - S_N(A+B) &= \sum_{m,k=0}^N \frac{1}{m!} A^m \frac{1}{k!} B^k - \sum_{l=0}^N \frac{1}{l!} (A+B)^l \\ &= \sum_{\substack{m,k \in \{0, \dots, N\} \\ m+k \geq N+1}} \frac{1}{m!k!} A^m B^k. \end{aligned}$$

Dabei haben wir für den letzten Umformungsschritt die binomischen Formeln ausgenutzt, die aufgrund der Kommutativität gelten. Somit gilt die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} \|S_N(A)S_N(B) - S_N(A+B)\| &= \sum_{\substack{m,k \in \{0, \dots, N\} \\ m+k \geq N+1}} \frac{1}{m!k!} \|A\|^m \|B\|^k \\ &\leq \sum_{\substack{m,k \in \mathbb{N} \\ m+k \geq N+1}} \frac{1}{m!k!} \|A\|^m \|B\|^k \\ &\leq \sum_{m,k \leq N/2} \frac{1}{m!k!} \|A\|^m \|B\|^k \\ &\leq \frac{\|A\|^{N/2} \|B\|^{N/2}}{(N/2)!} e^{\|A\|} e^{\|B\|}, \end{aligned}$$

wobei wir für den letzten Schritt ausnutzen, dass wir die zu zeigende Identität für die reellwertige Exponentialfunktion bereits kennen. \square

Satz 3.12 — Fundamentallösungen. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Fundamentallösung $X: \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}(n)$ von $x' = Ax$ mit $X(0) = I_n$ ist gegeben durch

$$X: t \mapsto e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k.$$

Beweis. Wir rechnen nach, dass

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} e^{At} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{As} - I_n}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k s^{k-1} = A \left(\lim_{s \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} A^k s^k \right) = A$$

Weiterhin kommutieren $A(t_0 + s)$ und $A t_0$ für alle $t_0, s \in \mathbb{R}$. Also folgt, dass

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} e^{At} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{A(t_0+s)} - e^{A t_0}}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(e^{As} - I_n) e^{A t_0}}{s} = A e^{A t_0}. \quad \square$$

Der symmetrische Fall. Wir wollen uns nun noch damit beschäftigen, wie wir das Matrixexponential explizit ausrechnen können. Beginnen wir mit dem wohl einfachsten Fall: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine symmetrische Matrix, d.h., $A = A^T$. Aus der *MfPI* ist dann bekannt, dass

- Die Eigenwerte von A sind alle reell;
- Ist λ ein Eigenwert von A , dann stimmt seine algebraische Vielfachheit mit seiner geometrischen Vielfachheit überein, d.h., ist λ eine m -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A(t) = \det(A - tI_n),$$

dann hat der zugehörige Eigenraum $\text{Eig}(A; \lambda) = \ker(A - \lambda I_n)$ die Dimension m ;

- Die Vereinigung von Basen aller Eigenräume $\text{Eig}(A; \lambda)$ zu allen Eigenwerten λ bildet eine Basis von \mathbb{R}^n .

Seien also $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte der symmetrischen Matrix A (Mehrfachnennung möglich!) und $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ eine zugehörige Basis aus Eigenvektoren, sodass $Av_i = \lambda_i v_i$. Setzen wir nun

$$S := \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Lambda := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

so gilt also $A = S\Lambda S^{-1}$. Damit zeigen Satz 3.12 und die Rechenregeln für das Matrixexponential, dass die Fundamentallösung zu den Anfangswerten $X(0) = I_n$ die Form

$$t \mapsto e^{At} = Se^{\Lambda t} S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} S^{-1} \quad (3.10)$$

hat. Weiterhin zeigt uns Satz 3.10, dass eine weitere Fundamentallösung — dieses Mal für $X(0) = S$ — gegeben ist durch

$$t \mapsto e^{At} = Se^{\Lambda t} S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Eine Basis aus Lösungen von $x' = Ax$ ist also gegeben durch

$$\left\{ (x_1: t \mapsto v_1 e^{\lambda_1 t}), \dots, (x_n: t \mapsto v_n e^{\lambda_n t}) \right\}.$$

Beispiel 3.9. Wir bestimmen noch die ausstehende homogene Lösung aus Beispiel 3.7. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ist in der t -Variablen konstant und symmetrisch. Damit ist $t \mapsto e^{At}$ eine Fundamentallösung. Um diese genauer zu berechnen bestimmen das charakteristische Polynom:

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2).$$

Also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -2$. Die zugehörigen Eigenräume sind

$$\begin{aligned} \text{Eig}(A; 4) &= \ker(A - 4I_n) = \ker \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ und} \\ \text{Eig}(A; -2) &= \ker(A + 2I_n) = \ker \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Eine konkrete Basis aus linear unabhängigen Lösungen ist also

$$\left\{ \left(x_1: t \mapsto \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} \right), \left(x_2: t \mapsto \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} \right) \right\}$$

die zu der bereits in Beispiel 3.8 betrachteten Fundamentallösung (3.9) korrespondiert.

Der diagonalisierbare Fall. Das charakteristische Polynom einer reellen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist ein Polynom n -ter Ordnung mit reellen Koeffizienten. Solche Polynome müssen nicht immer, wie es im symmetrischen Fall garantiert ist, in reelle Linearfaktoren zerfallen. Doch der Fundamentalsatz der Algebra garantiert uns, dass sie immer in komplexe Linearfaktoren zerlegbar sind, *d.h.*,

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Zu jedem dieser Eigenwerte gehört mindestens ein Eigenvektor $w_k = u_k + iv_k \in \mathbb{C}^n$, $u_k, v_k \in \mathbb{R}^n$. Um explizit Lösungen zu berechnen, ergibt es also Sinn auch komplexwertige Lösungen $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ für unsere Differentialgleichung $x' = Ax$ zuzulassen.

In der *MfPI* habt ihr gelernt, dass eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar heißt, wenn sie eine Basis aus Eigenvektoren besitzt. Äquivalent, wenn ihr $S \in \text{GL}(n; \mathbb{C})$ mit $A = S \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) S^{-1}$ findet. Das Matrixexponential ist ebenfalls für komplexwertige Matrizen sinnvoll, sodass ihr dann wieder Fundamentallösungen durch (3.10) bzw. (3.11) bekommt. Zusammengefasst gilt

Satz 3.13 — Fundamentallösungen (diagonalisierbar). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Sei $S \in \text{GL}(n; \mathbb{C})$ eine zugehörige Matrix mit $A = S \Lambda S^{-1}$ mit $\Lambda := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Dann ist die Fundamentallösung von $x' = Ax$ zum Anfangswert $X(0) = I_n$ gegeben durch

$$X: t \mapsto e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} S^{-1}$$

Wenn durch $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$ die Spalten von S beschrieben sind, *d.h.*, linear unabhängige Eigenvektoren mit $A v_i = \lambda_i v_i$, dann ist eine Basis aus des Lösungsraums gegeben durch

$$\left\{ (x_1: t \mapsto v_1 e^{\lambda_1 t}), \dots, (x_n: t \mapsto v_n e^{\lambda_n t}) \right\}.$$

Aber wie finden wir hieraus unsere ursprünglich gesuchten reellen Lösungen? Da χ_A reelle Koeffizienten hat, treten alle komplexen Eigenwerte und ihre Eigenvektoren in konjugierten Paaren auf:

$$\begin{aligned} \text{Eigenwerte: } & \lambda = \alpha + i\omega, \bar{\lambda} = \alpha - i\omega \\ \text{Eigenvektoren: } & w = u + iv, \bar{w} = u - iv \end{aligned}$$

Damit sind linear unabhängige komplexe Lösungen gegeben durch

$$x_1(t) = e^{(\alpha+i\omega)t}(u+iv) \quad \text{und} \quad x_2(t) = e^{(\alpha-i\omega)t}(u-iv).$$

Weiterhin ist $x_1(t) = \bar{x}_2(t)$. Somit erhalten wir linear unabhängige reelle Lösungen durch

$$\begin{aligned} \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} &= \operatorname{Re} x_1(t) = e^{\alpha t} \operatorname{Re} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))(u + iv) \\ &= e^{\alpha t} (u \cos(\omega t) - v \sin(\omega t)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{x_1(t) - x_2(t)}{2i} &= \operatorname{Im} x_1(t) = e^{\alpha t} \operatorname{Im} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))(u + iv) \\ &= e^{\alpha t} (v \cos(\omega t) + u \sin(\omega t)). \end{aligned}$$

Beispiel 3.10. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x' = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} x.$$

mit $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$. Das charakteristische Polynom ist

$$\det \left(\begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = (\lambda - \alpha)^2 + \omega^2 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

mit $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\omega$. Die zugehörigen (normierten) Eigenvektoren sind

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Also ist $A = S \begin{pmatrix} \alpha+i\omega & 0 \\ 0 & \alpha-i\omega \end{pmatrix} S^{-1}$ mit

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S^{-1} = S^H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Somit ist eine Fundamentallösung gegeben durch

$$e^{At} = S \begin{pmatrix} e^{(\alpha+i\omega)t} & 0 \\ 0 & e^{(\alpha-i\omega)t} \end{pmatrix} S^{-1} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Der allgemeine Fall. Im Allgemeinen ist eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nicht diagonalisierbar, selbst wenn wir Koeffizienten in \mathbb{C} zulassen. Dieser Fall tritt dann ein, wenn die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes $\lambda \in \mathbb{C}$ nicht mit der geometrischen übereinstimmt, d.h., λ ist eine m -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_A , aber $\dim \operatorname{Eig}(A; \lambda) < m$.

In der *MfPI* habt ihr aber gelernt, dass jede Matrix eine *Jordansche Normalform* besitzt: Es existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ und $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{Z}_{>0}$ mit $m_1 + \dots + m_p = n$ sowie ein Basiswechsel $S \in \operatorname{GL}(n; \mathbb{C})$, sodass $A = SJS^{-1}$ mit

$$J = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_p}(\lambda_p) \end{pmatrix}.$$

Hierbei sind die *Jordanschen Blöcke* definiert durch

$$J_{m_j}(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j}.$$

Eine direkte Rechnung zeigt, dass das Matrixexponential einzeln auf jeden Jordanschen Block wirkt, d.h., $e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$ mit

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_{m_1}(\lambda_1)t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_{m_p}(\lambda_p)t} \end{pmatrix}.$$

Wir müssen also nur noch die $e^{J_{m_j}(\lambda_j)t}$ einzeln berechnen.

Lemma 3.5. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $m > 0$ gilt

$$e^{J_m(\lambda)t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Wir zerlegen $J_m(\lambda)$ in $J_m(\lambda) = \lambda I_m + N_m$ mit

$$N_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Da I_m mit jeder Matrix kommutiert, also auch N_m gilt

$$e^{J_m(\lambda)t} = e^{\lambda I_m t} e^{N_m t} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} N_m^k t^k.$$

Nun rechnen wir direkt nach, dass $N_m^k = \mathbf{0}_m$ für alle $k \geq m$ und N_m^k für $k < m$ die Matrix ist, bei der nur auf der k -ten Nebendiagonalen Einsen stehen. \square

Satz 3.14 — Fundamentallösungen (Jordansche Normalform). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ mit zugehörigen Jordanschen Blöcken $J_{m_j}(\lambda_j)$ der Größe m_1, \dots, m_p . Dann ist die Fundamentallösung von $x' = Ax$ zum Anfangswert $X(0) = I_n$ gegeben durch

$$X: t \mapsto e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{J_{m_1}(\lambda_1)t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_{m_p}(\lambda_p)t} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Beispiel 3.11. Wir betrachten $x' = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

Es ergeben sich die Eigenräume

$$\text{Eig}(A; 1) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \text{Eig}(A; 2) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir müssen also noch einen Hauptvektor für $\lambda = 1$, also ein $v \notin \text{Eig}(A; 1)$ mit $(A - I_3)^2 v = 0$. Hier hilft uns die Beobachtung, dass $0 = (A - I_3)^2 v = (A - I_3)(A - I_3)v$, die Rechenarbeit zu vereinfachen. Denn hieraus folgt, dass $(A - I_3)v \in \text{Eig}(A; 1)$. Da $\text{Eig}(A; 1)$ eindimensional ist, müssen wir also nur das System

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen. Das ergibt $x = 0$, $y = 0$ und $z = -1$. (*Wichtig!:* Dieser Trick funktioniert hier nur, weil die algebraische Vielfachheit 2 ist. Im Allgemeinen müsst ihr das Verfahren verwenden, dass ihr in der MfP1 erarbeitet habt.)

Somit erhalten wir

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Eine Lösungsbasis für die lineare Differentialgleichung sind damit die Spalten von Se^{Jt} , also

$$x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = e^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad x_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.3.3 Skalare lineare Differentialgleichung höherer Ordnung

Wir betrachten jetzt die Differentialgleichung

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}x' + a_n(t)x = b(t) \quad (3.12)$$

mit $t \in I$ und $a_1, \dots, a_n, b \in C^0(I; \mathbb{R})$ und $x \in C^n(I; \mathbb{R})$. Das zugehörige Anfangswertproblem ist dann: Seien $t_0 \in I$ und $\xi_0, \dots, \xi_{n-1} \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann soll gelten

$$x(t_0) = \xi_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = \xi_{n-1}. \quad (3.13)$$

Wenden wir die Betrachtungen aus Abschnitt 3.1.2 an, dann können wir die zugehörige homogene Gleichung in ein System erster Ordnung $y' = A(t)y + \tilde{b}(t)$ umformen:

$$y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Wir können nun die bereits bekannten Aussagen über lineare Differentialgleichungen (Satz 3.9 und Satz 3.11) auf dieses Problem anwenden.

Satz 3.15.

- (i) Das Anfangswertproblem für (3.12) mit Anfangswerten (3.13) hat genau eine Lösung.
- (ii) Der Lösungsraum der zu (3.12) gehörenden homogenen Gleichung, d.h., $b(t) \equiv 0$, ist ein n -dimensionaler Untervektorraum von $C^n(I; \mathbb{R})$.
- (iii) Lösungen $x_1, \dots, x_n \in C^n(I; \mathbb{R})$ der zu (3.12) gehörenden homogenen Gleichung sind genau dann linear unabhängig, wenn die **Wronski-Matrix**

$$W(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

für ein $t_0 \in I$ und dann auch schon für alle $t \in I$ regulär ist.

- (iv) Ist $\{x_1, \dots, x_n\} \subset C^n(I; \mathbb{R})$ eine Basis der zu (3.12) gehörenden homogenen Gleichung, dann haben alle Lösungen der inhomogenen Gleichung die Form

$$x(t) = \sum_{k=1}^n c_k(t)x_k(t)$$

mit Koeffizientenfunktionen $c_k \in C^1(I; \mathbb{R})$. Diese bestimmen sich aus der Differentialgleichung

$$W(t) \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Anmerkung 3.4. Es ist an dieser Stelle wichtig zu bemerken, dass die Wronski-Matrix der skalaren linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung (3.12) genau eine Fundamentallösung der zugehörigen n -dimensionalen linearen Differentialgleichung erster Ordnung $y' = A(t)y$ ist.

Beispiel 3.12 — Getriebener Oszillator. Wir betrachten die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$x'' + x = \sin t.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist

$$x_H(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Das können wir einfach mithilfe der zugehörigen Wronski-Matrix

$$W(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

überprüfen. Wir werden im folgenden Abschnitt auch noch diskutieren, wie wir die allgemeine Lösung systematisch finden können. Um die partikuläre Lösung zu finden verwenden wir den Ansatz der Variation der Konstanten. Er besagt, dass jede partikuläre Lösung die Gestalt $x_P(t) = c_1(t) \cos(t) + c_2(t) \sin(t)$ hat mit Funktionen $c_1, c_2 \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ die der Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix} = W(t) \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1'(t) \cos(t) + c_2'(t) \sin(t) \\ c_2'(t) \cos(t) - c_1'(t) \sin(t) \end{pmatrix}$$

genügen. Lösen des Systems ergibt

$$\begin{cases} c_1' = -\sin^2(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t) \\ c_2' = \sin(t) \cos(t) = \frac{1}{2} \sin(2t). \end{cases}$$

Anschließendes Integrieren ergibt

$$\begin{cases} c_1(t) = -\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t) \\ c_2(t) = -\frac{1}{4} \cos(2t). \end{cases}$$

Somit ist die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems gegeben durch

$$x(t) = \left(-\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t) + c_1 \right) \cos(t) + \left(-\frac{1}{4} \cos(2t) + c_2 \right) \sin(t).$$

Konstante Koeffizienten. Wie für lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung werden wir uns nun skalare lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten anschauen. Wieder wird es uns möglich sein für diesen Spezialfall die Lösungsbasen explizit anzugeben. Wir betrachten also nun die Gleichung

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = 0 \quad (3.14)$$

für konstante $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Lemma 3.6. Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

hat die folgenden Eigenschaften:

- $\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n)$;
- Zu jedem Eigenwert λ von A gehört genau ein Eigenvektor. Insbesondere, kommt jeder Eigenwert in nur einem Jordanschen Block vor, dessen Dimension gleich der algebraischen Vielfachheit von λ ist.

Beweis. Sei $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Die Eigenwertgleichung $Av = \lambda v$ ergibt

$$\begin{cases} v_2 = \lambda v_1 \\ v_3 = \lambda v_2 \\ \vdots \\ v_n = \lambda v_{n-1} \\ -a_n v_1 - a_{n-1} v_2 - \dots - a_1 v_n = \lambda v_n. \end{cases}$$

Aus den ersten $n - 1$ Gleichungen folgt, dass $v_1 \neq 0$ und $v_j = \lambda^{j-1} v_1$ für $j = 1, \dots, n$. Somit ist v bis auf den skalaren Faktor v_1 vollständig durch λ bestimmt. Einsetzen in die letzte Gleichung ergibt zudem, dass $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$ ist. Der Laplace'sche Entwicklungssatz zeigt die Aussage über die Determinante. \square

Die **charakteristische Gleichung** der skalaren linearen Differentialgleichung (3.14) ist

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (3.15)$$

Das vorangegangene Lemma zeigt, dass die Lösungen $\lambda_j \in \mathbb{C}$ den Eigenwerten der Matrix A entsprechen. Diese Gleichung kann man sich leicht merken indem man den Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ für die Lösung wählt und diesen in die Differentialgleichung (3.14) einsetzt. Aus Satz 3.14 folgt nun die Charakterisierung der komplexwertigen Lösungen.

Satz 3.16 — Komplexe Lösungen. Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ die voneinander verschiedenen Lösungen der charakteristischen Gleichung (3.15) und m_j die Vielfachheit von λ_j .

Dann bilden die Funktionen

$$x_{jk}(t) = t^k e^{\lambda_j t}, \quad j \in \{1, \dots, p\}, \quad k \in \{0, \dots, m_j - 1\}$$

eine Basis aller komplexwertigen Lösungen von (3.14) in $C^n(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

Es ergibt sich also folgendes *Rezept* für die Bestimmung der komplexwertigen Lösung:

- (i) Bestimme die Nullstellen (inkl. Vielfachheiten) der charakteristischen Gleichung (3.15).
- (ii) Aufstellen der allgemeinen Lösung

- Für jede einfache Nullstelle λ_j enthält sie den Beitrag $c_j e^{\lambda_j t}$.
- Für jede m_j -fache Nullstelle λ_j enthält sie den Beitrag

$$(c_{j,0} + c_{j,1}t + \dots + c_{j,m_j-1}t^{m_j-1})e^{\lambda_j t}.$$

- (iii) Bestimme die Konstanten aus den Anfangswerten.

Beispiel 3.13. Wir betrachten die skalare homogene Gleichung 2. Ordnung

$$x'' + 3x' + 2x = 0$$

und Anfangswerte $x(0) = 4$ und $x'(0) = 5$. Wir wenden das Rezept an um die eindeutige Lösung zu finden:

- (i) Die charakteristische Gleichung ist

$$0 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2).$$

Die Eigenwerte sind also -1 und -2 , jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1.

- (ii) Die allgemeine Lösung ist also

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}.$$

- (iii) Ableiten von $x(t)$ ergibt $x'(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$. Somit erhalten wir zusammen mit den Anfangswerten das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 4 = x(0) = c_1 + c_2 \\ 5 = x'(0) = -c_1 - 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 13 \\ c_2 = -9. \end{cases}$$

Somit ist die Lösung der Differentialgleichung durch $x(t) = 13e^{-t} - 9e^{-2t}$ gegeben.

Beispiel 3.14. Betrachten wir nun die homogene skalare Gleichung 3. Ordnung

$$x''' + 4x'' + 5x' + 2x = 0$$

mit Anfangswerten $x(0) = 3$, $x'(0) = 5$ und $x''(0) = 7$. Wieder wenden wir das Rezept an:

- (i) Die charakteristische Gleichung ist

$$0 = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = (\lambda + 1)^2(\lambda + 2).$$

Somit sind Eigenwerte -1 und -2 , mit Vielfachheit 2 beziehungsweise 1.

- (ii) Damit ist die allgemeine Lösung

$$x(t) = (c_{1,0} + c_{1,1}t)e^{-t} + c_2 e^{-2t}.$$

- (iii) Um die Anfangswerte einsetzen zu können bestimmen wir zuerst die Ableitungen:

$$\begin{aligned} x'(t) &= c_{1,1}e^{-t} - (c_{1,0} + c_{1,1}t)e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}, \\ x''(t) &= -2c_{1,1}e^{-t} + (c_{1,0} + c_{1,1}t)e^{-t} + 4c_2 e^{-2t}. \end{aligned}$$

(iv) Aus den Anfangswerten erhalten wir dann ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten, dass wir lösen:

$$\begin{cases} 3 = x(0) = c_{1,0} + c_2 \\ 5 = x'(0) = c_{1,1} - c_{1,0} - 2c_2 \\ 7 = x''(0) = c_{1,0} - 2c_{1,1} + 4c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_{1,0} = -17 \\ c_{1,1} = 28 \\ c_2 = 20. \end{cases}$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist also $x(t) = -17e^{-t} + 28te^{-t} + 20e^{-2t}$.

Beispiel 3.15. Zu guter Letzt betrachten wir ein Beispiel mit komplexen Eigenwerten. Sei hierfür

$$x'' + 4x = 0$$

und Anfangswerte $x(0) = 2$ und $x'(0) = 3$.

(i) Die charakteristische Gleichung ist

$$0 = \lambda^2 + 4 = (\lambda + 2i)(\lambda - 2i).$$

Die Eigenwerte sind also $\pm 2i$, jeweils mit Vielfachheit 1.

(ii) Die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = c_1 e^{2it} + c_2 e^{-2it}.$$

(iii) Ableiten ergibt $x'(t) = 2ic_1 e^{2it} - 2ic_2 e^{-2it}$. Somit erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2 = x(0) = c_1 + c_2 \\ 3 = x'(0) = 2ic_1 - 2ic_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - \frac{3}{4}i \\ c_2 = 1 + \frac{3}{4}i. \end{cases}$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist also

$$x(t) = \left(1 - \frac{3}{4}i\right)e^{2it} + \left(1 + \frac{3}{4}i\right)e^{-2it} = 2 \cos(2t) + \frac{3}{2} \sin(2t).$$

Reelle Lösungen. Das letzte Beispiel zeigt, dass wir auch bei komplexen Eigenwerten reelle Lösungen finden können. Wir erweitern deshalb Punkte (ii) unseres *Rezepts* wie folgt:

- Für jedes Paar von einfachen komplex konjugierten Eigenwerten $\alpha \pm i\omega$ enthält die allgemeine (reelle) Lösung den Beitrag

$$c_1 e^{\alpha t} \cos(\omega t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\omega t),$$

mit reellen Koeffizienten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

- Für jedes Paar von m -fach komplex konjugierten Eigenwerten $\alpha \pm i\omega$ enthält die allgemeine Lösung den Beitrag

$$(c_{1,0} + c_{1,1}t + \dots + c_{1,m-1}t^{m-1})e^{\alpha t} \cos(\omega t) + (c_{2,0} + c_{2,1}t + \dots + c_{2,m-1}t^{m-1})e^{\alpha t} \sin(\omega t)$$

mit reellen Koeffizienten $c_{1,1}, \dots, c_{1,m-1}, c_{2,1}, \dots, c_{2,m-1} \in \mathbb{R}$.

Beispiel 3.16 — Gedämpfter Oszillator. Wir betrachten die homogene Gleichung 2. Ordnung

$$x'' + 2\mu x' + \omega^2 x = 0.$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung ist

$$0 = \lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega^2 = \left(-\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega^2}\right) \left(-\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega^2}\right).$$

- **Kleine Dämpfung:** Ist $0 < \mu < \omega$, dann sind die Eigenwerte $\lambda_{\pm} = -\mu \pm i\sqrt{\omega^2 - \mu^2}$ komplex. Somit ist die allgemeine Lösung

$$x(t) = e^{-\mu t} (c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t))$$

mit $\omega_0 := \sqrt{\omega^2 - \mu^2} < \omega$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. (Die Frequenz ω_0 nimmt also mit zunehmender Dämpfung μ ab.)

- **Kritische Dämpfung:** Ist $\mu = \omega$, dann ist der einzige Eigenwert $\lambda = -\mu$. Somit ist die allgemeine Lösung

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\mu t}.$$

- **Überdämpfung:** Für $\mu > \omega$ sind die Eigenwerte $\lambda_{\pm} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2} < 0$ reell und negativ. Somit ist die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^{-(\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega^2})t} + c_2 e^{-(\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega^2})t}.$$

Ansätze für Inhomogenitäten. Wir haben bereits in Satz 3.15 angegeben wie wir partikuläre Lösungen mithilfe der Variation der Konstanten finden können. Diese Methode liefert uns immer eine partikuläre Lösung. (In der Praxis müssen wir es dann natürlich immer auch schaffen die Koeffizienten zu integrieren ...) In vielen üblichen Fällen kommen wir aber schneller zum Ziel, wenn wir einen *Ansatz vom Typ der rechten Seite* machen: Wir nehmen eine spezielle Gestalt der Lösung an und versuchen die genauen Parameter durch einsetzen in die Differentialgleichung zu ermitteln. Natürlich hängt unser Ansatz vom der Art/Typ der Inhomogenität ab. Hier sind einige übliche Ansätze

Rechte Seite $b(t)$	Ansatz
Polynom vom Grad m $b(t) = A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m$	$x(t) = B_0 + B_1 t + \dots + B_m t^m$
Trigonometrisches Polynom $b(t) = \sum_{k=1}^m (A_k \sin(\omega_k t) + B_k \cos(\omega_k t))$	$x(t) = \sum_{k=1}^m (C_k \sin(\omega_k t) + D_k \cos(\omega_k t))$

Tabelle 3.1. Ansätze für verschiedene rechte Seiten $b(t)$.

Resonanz. Im Fall, dass die Inhomogenität $b(t)$ im Lösungsraum des zugehörigen homogenen Problems enthalten ist, spricht man von **Resonanz**. In diesem Fall können wir nicht einfach die oben erwähnten Ansätze verwenden. Wir können die Ansätze aber abwandeln: Ist $b(t)$ im Lösungsraum der zum Eigenwert λ gehört, dann müssen wir den obigen Ansatz mit einem Polynom in t von der Ordnung der algebraischen Vielfachheit von λ multiplizieren.

Beispiel 3.17 — Getriebener Oszillator (Fortsetzung). Wir versuchen die Differentialgleichung aus Beispiel 3.12 mithilfe eines Ansatzes zu lösen. Da die Eigenfrequenz der homogenen Gleichung gleich der Frequenz der rechten Seite ist, die zu dem komplexen Eigenwertpaar $\pm i$ der Vielfachheit 1 gehört, ist unser Ansatz $x(t) = t(a \cos t + b \sin t)$. Die Ableitungen sind entsprechend

$$\begin{aligned}x'(t) &= a \cos t + b \sin t + t(-a \sin t + b \cos t), \\x''(t) &= -2a \sin t + 2b \cos t + t(-a \cos t - b \sin t).\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\sin t = x'' + x = -2a \sin t + 2b \cos t.$$

Somit ist $a = -1/2$ und $b = 0$, also

$$x(t) = -\frac{t \cos t}{2}$$

eine partikuläre Lösung.

Als Probe können wir die Differenz zu der in Beispiel 3.12 ausgerechneten partikulären Lösung bilden. Diese ist

$$\frac{\sin(2t - t)}{4} = \frac{\sin t}{4},$$

eine Lösung der homogenen Gleichung, wie sie es auch sein sollte.

3.4 Dynamische Systeme

In diesem Abschnitt wollen wir das qualitative Verhalten von Lösungen von autonomen Differentialgleichung erster Ordnung

$$x' = f(x) \tag{3.16}$$

untersuchen. Im Folgenden werden wir einige vereinfachende Annahmen machen:

- $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist ein C^1 -Vektorfeld über der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$.
- Für alle Anfangswerte $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$ existiert die maximale Lösung $x_{(t_0, x_0)}: I_{(t_0, x_0)} \rightarrow U$ von (3.16) auf ganz \mathbb{R}^n , d.h., $I_{(t_0, x_0)} = \mathbb{R}$.

Wir haben uns in den vorangegangenen Abschnitten mit der Existenz- und Eindeigkeitstheorie dieser Gleichungen befasst. Hier sammeln wir zuerst einige Beobachtungen.

Beobachtung 1. Wir haben bereits beobachtet, dass alle Lösungen eines autonomen Systems durch Zeitverschiebungen entstehen. In Formeln bedeutet das: Seien $x_0 \in U$ und $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$. Für die maximale Lösungen $x_{(t_0, x_0)}$ und $x_{(t_1, x_0)}$ gilt

$$x_{(t_1, x_0)}(t) = x_{(t_1 - \tau, x_0)}(t - \tau) = x_{(t_0, x_0)}(t - \tau)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Hier ist $\tau := t_1 - t_0$.

Beobachtung 2. Es gibt drei Typen von maximalen Lösungen $x: \mathbb{R} \rightarrow U$.

- (i) Fixpunkte/Gleichgewichte: Es gilt $x'(t_0) = 0$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$, d.h., $f(x_0) = 0$ mit $x_0 = x(t_0)$. Es folgt, dass $x'(t) \equiv 0$ und $x(t) \equiv x_0$.

- (ii) **Periodische Lösungen:** Es gilt $x'(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und es gibt $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ mit $x(t_0) = x(t_1) =: x_0$. Dann ist x periodisch mit Periode $T := t_1 - t_0$, d.h.,

$$x(t+T) = x(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

- (iii) **Aperiodische Lösungen:** Es gilt $x'(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und x ist injektiv, d.h., „ x geht durch keinen Punkt zweimal“.

3.4.1 Phasenraum, Orbits und Erhaltungsgrößen

Die Menge U werden wir im folgenden den **Phasenraum** der Differentialgleichung (3.16). Weiterhin nennen wir die reelle 1-parameter Familie

$$\Phi: \mathbb{R} \times U \rightarrow U, \quad (t, x_0) \mapsto \Phi^t(x_0) := x_{(0, x_0)}(t) = x_{(t_0, x_0)}(t + t_0)$$

Phasenraumfluss bzw. **dynamisches System**. Hier ist $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Die Spur

$$\mathcal{O}_{x_0} := \{x_{(t_0, x_0)}(t) : t \in \mathbb{R}\} = \{\Phi^t(x_0) : t \in \mathbb{R}\}$$

heißt **Orbit** durch x_0 . Der folgende Satz zeigt, dass die Orbits den Phasenraum in disjunkte Mengen zerlegen. Diese Zerlegung heißt **Phasenraumporträt**.

Satz 3.17. Für den Phasenraumfluss gilt:

- (i) $\Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^{t+s}$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$;
- (ii) $\Phi^{t_0}: U \rightarrow U$ ist für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus. Insbesondere ist $(\Phi^{t_0})^{-1} = \Phi^{-t_0}$.
- (iii) Haben zwei Orbits einen gemeinsamen Schnittpunkt, so stimmen sie überein.

Beweis.

- (i) Sei $x_0 \in U$ und $t, s \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\Phi^t(\Phi^s(x_0)) = x_{(0, \Phi^s(x_0))}(t) = x_{(s, \Phi^s(x_0))}(t+s) = x_{(0, x_0)}(t+s) = \Phi^{t+s}(x_0).$$

- (ii) Den Beweis für die Regularitätseigenschaften des Phasenraumfluss könnte ihr z.B. in [FK14, §7] finden.

- (iii) Seien $x_0, x_1 \in U$. Angenommen $y \in \mathcal{O}_{x_0}$ und $y \in \mathcal{O}_{x_1}$, d.h., es gibt $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$y = \Phi^{t_0}(x_0) = x_{(0, x_0)}(t_0) \quad \text{und} \quad y = \Phi^{t_1}(x_1) = x_{(0, x_1)}(t_1).$$

Das lässt sich ebenfalls schreiben als

$$x_{(0, x_0)}(t) = x_{(t_0, y)}(t) \quad \text{und} \quad x_{(0, x_1)}(t) = x_{(t_1, y)}(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi^t(x_0) &= x_{(0, x_0)}(t) = x_{(t_0, y)}(t) = x_{(t_1, y)}(t + t_1 - t_0) \\ &= x_{(0, x_1)}(t + t_1 - t_0) = \Phi^{t+t_1-t_0}(x_1). \end{aligned} \quad \square$$

Definition 3.6. Eine C^1 -Funktion $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Erhaltungsgröße** des dynamischen Systems $x' = f(x)$, wenn

$$\frac{d}{dt}F(\Phi^t(x_0)) = 0$$

für alle $x_0 \in U$ gilt.

Satz 3.18. Ist F eine Erhaltungsgröße, dann gilt $t \mapsto F(\Phi^t(x_0))$ konstant für alle $x_0 \in U$. Äquivalent gilt

$$O_{x_0} \subset F^{-1}\{F(x_0)\}$$

für alle $x_0 \in U$.

Beweis. (Übung!) □

3.4.2 Fixpunkte und Stabilität

Definition 3.7. Ein $x_0 \in U$ heißt **Fixpunkt** (auch *Gleichgewicht*) des dynamischen Systems (3.16), falls $f(x_0) = 0$. Das ist äquivalent zu $\Phi^t(x_0) \equiv x_0$.

Wir wollen nun das qualitative Verhalten um einen Fixpunkt verstehen. Die folgende Intuition wird uns leiten: Sei x_0 ein Fixpunkt x_0 . Für $y \in U$ definieren wir den Abstand

$$d(t) := \Phi^t(y) - \Phi^t(x_0) = x_{(0,y)}(t) - x_0.$$

Da f ein C^1 -Vektorfeld ist, können wir f lokal durch df approximieren, sodass

$$f(x_0 + z) = f(x_0) + df(x_0)z + o(\|z\|^2).$$

Sei nun $y \in U$. Die Ableitung von d ist gegeben durch

$$x'_{(0,y)}(t) = f(x_{(0,y)}(t)) = f(x_0 + d(t)) = f(x_0) + df(x_0)d(t) + o(\|d\|^2).$$

Ist also $\|d\|$ „klein“, so sollte $o(\|d\|^2)$ für das qualitative Verhalten vernachlässigbar sein.

Definition 3.8. Die homogene lineare Differentialgleichung

$$y' = Ay$$

mit $A := df(x_0)$ ist die **Linearisierung** des Systems $x' = f(x)$ um $x_0 \in U$.

Wir wollen einen Fixpunkt $x_0 \in U$ **hyperbolisch** nennen, wenn für alle Eigenwerte λ_i des Differentials $df(x_0)$ der Realteil $\operatorname{Re}(\lambda_i) \neq 0$ erfüllt. Der nachfolgende Satz, den wir an dieser Stelle nicht beweisen werden, zeigt, dass diese Bedingung hinreichende dafür ist, dass das Phasenporträt von $x' = f(x)$ um den Fixpunkt x_0 „so aussieht wie“ das Phasenporträt der Linearisierung.

Satz 3.19 — Grobmann–Hartmann. Ist x_0 ein hyperbolischer Fixpunkt des dynamischen Systems zum C^1 -Vektorfelds $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, so ist das Phasenporträt in einer Umgebung von x_0 topologisch konjugiert zum Fluss der Linearisierung $z' = Az$ um x_0 .

Hier haben wir „so aussieht wie“ durch „topologisch konjugiert“ ersetzt: Der Fluss von $x' = f(x)$ heißt **topologisch konjugiert** zu seiner Linearisierung $A = df(x_0)$, wenn offene Umgebungen U_0 von x_0 und V_0 von $z_0 = 0$ existieren, sowie ein Homöomorphismus $\varphi: U_0 \rightarrow V_0$, sodass $\varphi(x_0) = 0$ und $\varphi(\Phi^t(x)) = \Psi^t(\varphi(x))$. Hier ist Ψ^t der Fluss von $z' = Az$.

Zu guter Letzt wollen wir uns noch mit der Stabilität von Fixpunkten befassen. Wir werden zwischen zwei Arten von Stabilität unterscheiden.

Definition 3.9. Ein Fixpunkt x_0 von $x' = f(x)$ heißt

- **stabil**, wenn für all $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass aus $\|y - x_0\| < \delta$ folgt, dass $\|\Phi^t(y) - x_0\| < \epsilon$ gilt.
- **asymptotisch stabil**, wenn x_0 stabil ist und ein $\delta_1 > 0$ existiert, sodass aus $\|y - x_0\| < \delta_1$ folgt, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi^t(y) = x_0$.
- **instabil**, wenn er nicht stabil ist.

Um die Stabilität eines Fixpunktes zu charakterisieren, verallgemeinern wir den Begriff der Erhaltungsgröße (Definition 3.6): Eine C^1 -Funktion $L: U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Lyapunov-Funktion** für das Vektorfeld $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$, falls für alle $x \in U$

$$t \mapsto \frac{d}{dt}L(\Phi^t(x))$$

konstantes Vorzeichen hat.

Satz 3.20 — Lyapunov. Ist $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld, $x_0 \in U$ ein Fixpunkt von $x' = f(x)$ und $L: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion für f , die in x_0 ein striktes lokales Minimum besitzt:

- (i) $\frac{d}{dt}L(\Phi^t(x)) \leq 0$ auf $U \Rightarrow x_0$ ist stabil.
- (ii) $\frac{d}{dt}L(\Phi^t(x)) < 0$ auf $U \setminus \{x_0\} \Rightarrow x_0$ ist asymptotisch stabil.
- (iii) $\frac{d}{dt}L(\Phi^t(x)) > 0$ auf $U \setminus \{x_0\} \Rightarrow x_0$ ist instabil.

Beweis.

- (i) Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $L(x_0) = 0$ ist. Sei $\epsilon > 0$. Da x_0 ein striktes lokales Minimum von L ist, existiert ein ϵ_1 mit $\epsilon > \epsilon_1 > 0$, sodass $L(x) > L(x_0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{B}_{\epsilon_1}(x_0) \setminus \{x_0\}$. Nun ist L stetig und $\partial\mathbb{B}_{\epsilon_1}(x_0)$ kompakt, sodass

$$m := \min_{x \in \partial\mathbb{B}_{\epsilon_1}(x_0)} L(x) > 0$$

existiert. Weiterhin folgt aus der Stetigkeit von L , dass ein $\delta > 0$ existiert, sodass aus $y \in \mathbb{B}_\delta(x_0)$ folgt, dass

$$|L(y) - L(x_0)| = L(y) < m.$$

Wir wollen zeigen, dass für alle $y \in \mathbb{B}_\delta(x_0)$ folgt, dass $|\Phi^t(y) - x_0| < \epsilon$ für alle $t > 0$ ist. Angenommen dem wäre nicht so. Dann gäbe es ein $T > 0$ mit $\Phi^T(y) \in \partial\mathbb{B}_{\epsilon_1}(x_0)$, d.h. $L(\Phi^T(y)) \geq m$. Weiterhin ist $t \mapsto L(\Phi^t(y))$ monoton fallend, sodass

$$m \leq L(\Phi^T(y)) \leq L(\Phi^0(y)) = L(y) < m.$$

Ein Widerspruch!

- (ii) Wir setzen die Konstruktion aus (i) fort. Wir wollen nun zeigen, dass aus $y \in \mathbb{B}_\delta(x_0)$ schon $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi^t(y) = x_0$ folgt, d.h. wir müssen für alle $y \in \mathbb{B}_\delta(x_0)$ zeigen, dass für alle $\epsilon' < \epsilon$ ein $T > 0$ existiert, sodass

$$\Phi^t(y) \in \mathbb{B}_{\epsilon'}(x_0)$$

für alle $t > T$ gilt. Wieder werden wir einen Widerspruchsbeweis führen. Aus (i) wissen wir, dass ein $\delta' > 0$ existiert, sodass

$$y \in \mathbb{B}_{\delta'} \implies \Phi^t(y) \in \mathbb{B}_{\epsilon'}(x_0) \quad \forall t > 0.$$

Wir nehmen nun an, dass ein $y \in \mathbb{B}_{\delta}(x_0)$ existiert, sodass

$$\Phi^t(y) \in \overline{\mathbb{B}_{\epsilon}(x_0)} \setminus \mathbb{B}_{\delta'}(x_0).$$

Da diese Menge kompakt ist und $t \mapsto \frac{d}{dt}L(\Phi^t(y))$ streng monoton fallend ist, nähme diese Funktion ein Maximum $-\mu < 0$ an, d.h.

$$\frac{d}{dt}L(\Phi^t(y)) \leq -\mu$$

für alle $t > 0$. Es würde

$$L(\Phi^t(y)) = L(y) + \int_0^t \frac{d}{dt}L(\Phi^t(y)) dt = L(y) - \mu t$$

folgen. Somit wäre $L(\Phi^t(y)) \rightarrow -\infty$ für $t \rightarrow \infty$, was im Widerspruch zu $L|_{\mathbb{B}_{\epsilon}(x_0)} \geq 0$ steht.

(iii) Analog zu dem vorangegangenen Beweis. (*Details: Übung!*)

□

Der nachfolgende Satz wird uns noch eine Möglichkeit bieten, eine Aussage über die Stabilität eines Fixpunktes zu treffen, wenn wir nur die Linearisierung des dynamischen Systems kennen. Das hat den Vorteil, dass keine Lyapunov-Funktion finden müssen. Allerdings hat er eine „Grauzone“, z.B. wenn alle Eigenwerte $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ erfüllen. Hier gibt uns der folgende Satz keine Auskunft über die Stabilität, sodass wir in diesen Fällen doch wieder eine Lyapunov-Funktion finden müssen.

Satz 3.21 — Poincaré–Lyapunov. Ist $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld, $x_0 \in U$ ein Fixpunkt von $x' = f(x)$ und $A := df(x_0)$.

- (i) Haben alle Eigenwerte λ_i von A negativen Realteil, $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ für alle i , so ist x_0 asymptotisch stabil.
- (ii) Hat A mindestens einen Eigenwert mit $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$, so ist x_0 instabil.

Beweis. Ich werde hier nur den Beweis für (i) skizzieren. Wir betrachten die Linearisierung um x_0

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + \underbrace{df(x_0)}_{:=A} v + o(v) \|v\|$$

mit $\lim_{\|v\| \rightarrow 0} o(v) = 0$. Wir betrachten

$$P := \int_0^{\infty} e^{A^T t} e^{At} dt.$$

Diese Integral existiert, da wir in Lemma 3.5 gesehen haben, dass die Einträge des Integranden alle Linearkombinationen von $t^k e^{\lambda_i t}$ sind und $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ nach Voraussetzung. Weiterhin ist P symmetrisch und positiv definit, denn für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$v^T P w = \int_0^{\infty} v^T e^{A^T t} e^{At} w dt = \int_0^{\infty} w^T e^{A^T t} e^{At} v dt = w^T P v.$$

Wir behaupten, dass $L(x) := (x - x_0)^T P(x - x_0)$ eine Lyapunov-Funktion ist. Zuerst rechnen wir nach, dass

$$A^T P + P A = \int_0^\infty A^T e^{A^T t} + e^{A t} A \, dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt} (e^{A^T t} e^{A t}) \, dt = -I_n.$$

Sei $y \in U$. Um die Notation zu vereinfachen, setzen wir $x(t) := \Phi^t(y)$ und $v(t) := x(t) - x_0$. Dann rechnen wir nach, dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(x) &= \langle \text{grad}_x L, f(x) \rangle \\ &= \langle 2v^T P, A(v) + o(v) \|v\| \rangle \\ &= v^T (A^T P + P A) v + 2v^T P o(v) \|v\| \\ &= -\|v\|^2 + 2\langle v, P o(v) \rangle \|v\| \\ &\leq \|v\|^2 (2\|P\| \|o(v)\| - 1). \end{aligned}$$

Somit ist $L(x) < 0$ in einer Umgebung von x_0 und damit x_0 asymptotisch stabil nach Satz 3.20. \square

Literatur

- [BF96] M. Barner und F. Flohr. *Analysis II*. Berlin: de Gruyter, 1996. ISBN: 978-3-11-015033-9. DOI: 10.1515/9783110808896.
- [FK11] H. Fischer und H. Kaul. *Mathematik für Physiker. Band 1*. 7. Aufl. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2011. ISBN: 978-3-8348-1220-9. DOI: 10.1007/978-3-662-56561-2.
- [FK14] H. Fischer und H. Kaul. *Mathematik für Physiker. Band 2*. 4. Aufl. Wiesbaden: Springer Spektrum Wiesbaden, 2014. ISBN: 978-3-658-00476-7. DOI: 10.1007/978-3-658-00477-4.
- [Lee12] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2. Aufl. Bd. 218. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 2012. ISBN: 978-1-4419-9981-8. DOI: 10.1007/978-1-4419-9982-5.

Sachregister

A

äußere Einheitsnormalenfeld, 43, 45
äußere Volumen, 2
Anfangswertproblem, 61
Ausschöpfung, 21
autonom, 60

B

Bogenelement
 skalar, 25
 vektoriell, 25

C

charakteristische Funktion, 6
charakteristische Gleichung, 85

D

Darboux-Summe, 5
Dimension, 31
Dirichlet-Funktion, 8
Divergenz, 43
divergenzfrei, 58
Divergenzsatz
 Mannigfaltigkeiten, 45
 Quader, 44
Drehoperator, 43
dynamisches System, 90

E

eindeutig lösbar, 62
einfach (Kurve), 25
einfach zusammenhängend, 49
Einheitsnormalenfeld, 33
Elementarmenge, 1
Erhaltungsgröße, 91

F

Fixpunkt, 91
 asymptotisch stabil, 92
 hyperbolisch, 91
 instabil, 92

stabil, 92

Flächeninhalt, 3
Flächenstück (regulär), 27
Flussintegral, 28
Fortsetzung, 6
Fundamentallösung, 58, 72
Funktionaldeterminante, 15

G

gaußsche Fehlerintegral, 24
geschlossen
 Kurve, 25
 Untermannigfaltigkeit, 31
gewöhnliche Differentialgleichung
 autonom, 60
 explizite Form, 60
 Fortsetzbarkeit, 68
 implizite Form, 60
 maximal Lösung, 68
 Ordnung, 60
 separierbar, 62
Gleichgewicht, 91
gleichmäßig stetig, 12
Gradient, 26
Gram'sche Determinante, 51
Gram'sche Matrix, 51
Green'sche Darstellungsformel, 58
Gronwallsche Ungleichung, 67
Gruppe
 spezielle orthogonale, 36
Guldin'sche Regel
 für Oberflächen, 30
 für Volumina, 16

H

Halbebene, 31
harmonische Funktion, 51
Helmholtz-Zerlegung, 58
homogen, 71
homotop (Kurven), 49

Homotopie, 49

I

Indikatorfunktion, 6

inhomogen, 71

Innere (Untermannigfaltigkeit), 31

innere Volumen, 2

Integral

 Kurvenintegral

 erster Art, 25

 zweiter Art, 25

 Lebesgue-Integral, 9

 Oberflächenintegral

 erster Art, 28, 34

 zweiter Art, 28, 34

 Riemann-Integral, 6

 uneigentliche Riemann-Integral, 22

integrierbar, 6

 lokal, 22

 uneigentlich, 22

iterierte Integrale, 9

J

Jacobi-Determinante, 15

Jordan-

 -messbar, 2

 -Nullmenge, 3

Jordansche Normalform, 80

K

Kartenwechsel, 32

konservativ (Vektorfeld), 47

Konturintegral, 25

Kreis, 31

Kreisscheibe, 32

Kreuzprodukt, 27

Kugel, 32

Kugelkoordinaten, 18

Kurve (parametrisiert), 25

Kurvenintegral

 erster Art, 25

 zweiter Art, 25

L

Länge, 3, 26

Laplace-Gleichung, 51

Laplace-Operator, 51

Lebesgue-

 -Integral, 9

 -Kriterium, 7

 -Maß, 3

Leibnizregel

 für Gradienten, 26

 für Parameterintegrale, 11

Lemma von Gronwall, 67

linear-beschränkt, 70

lineare Differentialgleichung, 70

 homogen, 71

 inhomogen, 71

Linearisierung, 91

Lipschitz-Bedingung, 64

Lipschitz-Konstante, 64

lokal beschränkt, 22

lokal Riemann-integrierbar, 22

Lyapunov-Funktion, 92

M

Matrix-Exponentialfunktion, 75

Möbius-Band, 33

N

Normalenraum, 32

Normalenvektor, 27

Nullmenge, 3

O

Oberfläche, 29

Oberflächenelement

 skalar, 28

 vektoriell, 28

Oberflächenintegral

 erster Art, 28, 34

 zweiter Art, 28, 34

Oberintegral, 5

Orbit, 90

Ordnung, 60

orientierbar, 33

Orientierung, 33

orientierungserhaltend, 25, 29

orthogonal (Koordinaten), 51

Oszillation, 13

P

Parameter, 11

Parameterintegral, 11

Parametrisierung (lokal), 31

partikuläre Lösung, 71
Peano-Kurve, 3
Phasenraum, 90
Phasenraumfluss, 90
Phasenraumporträt, 90
Picard-Iteration, 66
Poisson-Gleichung, 51
Polarkoordinaten, 17
Potential, 47
Potentialfeld, 47
Prinzip von Cavalieri, 11

Q

Quader, 1

R

Rand (Untermannigfaltigkeit), 31
raumfüllende Kurven, 3
rechte Seite, 60
Rechteck, 1
regulär
 Kurve, 25
Resonanz, 88
Riemann-
 -Integral, 6
 -integrierbar, 6
 -integrierbar (lokal), 22
 -integrierbar (uneigentlich), 22
Rotation, 37
rotationsfrei, 49
Rotationssatz
 Mannigfaltigkeiten, 39
 Rechtecke, 39

S

Satz
 von Fubini, 9
 von Gauß
 Mannigfaltigkeiten, 45
 Quader, 44
 von Green, 41
 von Picard–Lindelöf, 65
 von Stokes
 Mannigfaltigkeiten, 39
 Rechtecke, 39
schiefsymmetrisch, 36
Sphäre, 28, 31

T

Tangentialraum, 32
Tangentialvektor, 25, 27
thomaesche Funktion, 8
topologisch konjugiert, 91
Transformationsformel, 15, 16
Transformationsatz, 15, 16
Trennung der Veränderlichen, 62

U

Umparametrisierung
 von Flächen, 29
 von Kurven, 25
uneigentlich Riemann-integrierbar, 22
uneigentliche Riemann-Integral, 22
Unterintegral, 5
Untermannigfaltigkeit, 31

V

Verfeinerung, 1
Volltorus, 17
Volumen, 3
 einer Elementarmenge, 1
 eines Quaders, 1
 eines Rotationstoros, 17

W

Wegintegral, 25
wegzusammenhängend, 47
wirbelfrei, 49
Wronski-Matrix, 83

Z

Zerlegung
 der Eins, 34
 Elementarmengen, 1
 kompakte Elementarmengen, 13
 offene Mengen, 21
Zylinderkoordinaten, 18